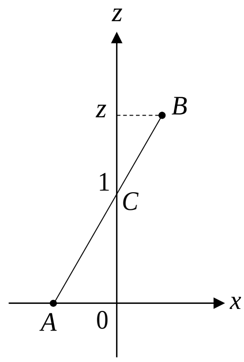
2016 年東大理 $\boxed{6}$



右図のように、点 A を x 軸の負側に固定し、$B(x,\ 0,\ z)\ (x \geqq 0,\ z \geqq 1)$ とする。

相似性より、$CB = AB \times \dfrac{z-1}{z} = \dfrac{2(z-1)}{z}$ であるから

$$x = \sqrt{\frac{4(z-1)^2}{z^2} - (z-1)^2} = \frac{z-1}{z}\sqrt{4-z^2}$$

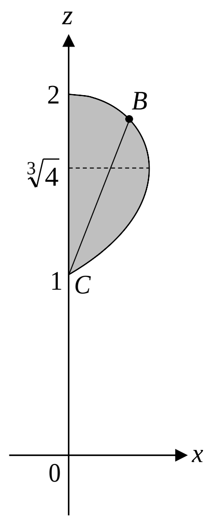
$4 - z^2 \geqq 0$ より　$\therefore 1 \leqq z \leqq 2$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{z^2}\sqrt{4-z^2} - \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z}{\sqrt{4-z^2}} = \frac{4-z^2-z^2(z-1)}{z^2\sqrt{4-z^2}} = \frac{4-z^3}{z^2\sqrt{4-z^2}}$$

z	1	$\cdots$	$\sqrt[3]{4}$	$\cdots$	2
$\dfrac{dx}{dz}$		＋	0	－	
x	0	↗		↘	0

x の $1 \leqq z \leqq 2$ における増減は、右の通り。

$1 \leqq z \leqq 2$ において線分 CB が通過する領域は、右図のようになる。
対称性より、題意の体積は、これを z 軸中心に回転させてできる
立体の体積に等しい。



この立体の、$z = t\ (1 \leqq z \leqq 2)$ における断面の面積は、

半径 $x = \dfrac{t-1}{t}\sqrt{4-t^2}$ の円の面積であるから、求める体積は

$$\pi\int_1^2 \frac{(z-1)^2(4-z^2)}{z^2}dz$$

$$= \pi\int_1^2 (z^2-2z+1)\left(\frac{4}{z^2}-1\right)dz = \pi\int_1^2\left(3-\frac{8}{z}+\frac{4}{z^2}-z^2+2z\right)dz$$

$$= \pi\left[3z - 8\log z - \frac{4}{z} - \frac{z^3}{3} + z^2\right]_1^2 = \pi\left(6 - 8\log 2 - 2 - \frac{8}{3} + 4 - 3 + 4 + \frac{1}{3} - 1\right)$$

$$= \pi\left(\frac{17}{3} - 8\log 2\right)$$ ……(答)