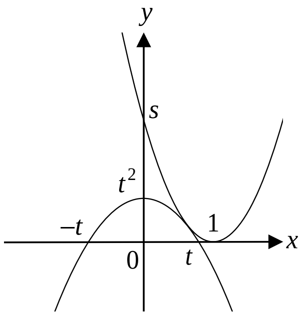
2017 年東大文 $\boxed{1}$

$$P=s\int_0^1(x-1)^2dx=s\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}s \qquad Q=\int_0^t(-x^2+t^2)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+t^2x\right]_0^t=\frac{2}{3}t^3$$



A と B がただ 1 点を共有するとき、$s(x-1)^2=-x^2+t^2$ とすると

$$(s+1)x^2-2sx+s-t^2=0 \qquad D/4=s^2-(s+1)(s-t^2)=0$$

（解答 1） t を消去

$s>0$ より　$s-t^2=\dfrac{s^2}{s+1}$　$t^2=s-\dfrac{s^2}{s+1}=\dfrac{s(s+1)-s^2}{s+1}=\dfrac{s}{s+1}<1$

$\dfrac{Q}{P}=\dfrac{2t^3}{s}=\dfrac{2}{s}\left(\dfrac{s}{s+1}\right)^{\frac{3}{2}}$ より　$\dfrac{Q^2}{P^2}=\dfrac{4}{s^2}\dfrac{s^3}{(s+1)^3}=\dfrac{4s}{(s+1)^3}$　　$f(s)=\dfrac{4s}{(s+1)^3}$ とすると

$$f'(s)=\frac{4(s+1)^3-4s\cdot 3(s+1)^2}{(s+1)^6}=\frac{4(s+1)-12s}{(s+1)^4}=\frac{4(1-2s)}{(s+1)^4}$$

$f(s)$ の増減は右の通りで、$s=\dfrac{1}{2}$ のとき最大である。

s	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(s)$		＋	0	－
$f(s)$		↗		↘

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\cdot\dfrac{8}{27}=\dfrac{16}{27}$ より、$\dfrac{Q}{P}$ の最大値は　$\therefore\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　$\cdots\cdots$(答)

（解答 2） s を消去

$s^2=(s+1)(s-t^2)=s^2-st^2+s-t^2$　　$(1-t^2)s=t^2$　　$0<t<1$ より　$s=\dfrac{t^2}{1-t^2}$

$\dfrac{Q}{P}=\dfrac{2t^3}{s}=2t^3\cdot\dfrac{1-t^2}{t^2}=2t(1-t^2)$　　$f(t)=2t(1-t^2)$ とすると　$f'(t)=2-6t^2=6\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-t\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+t\right)$

$f(t)$ の増減は右の通りで、$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大である。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		＋	0	－	
$f(t)$		↗		↘	

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ より、

$\dfrac{Q}{P}$ の最大値は　$\therefore\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　$\cdots\cdots$(答)