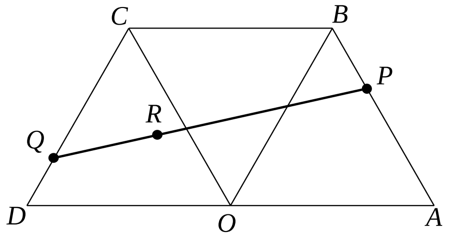
2017 年東大文 $\boxed{2}$

正六角形の中心を O とする。$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ である。

$AP=sAB(0\leqq s\leqq 1)$, $DQ=tDC(0\leqq t\leqq 1)$ とすると



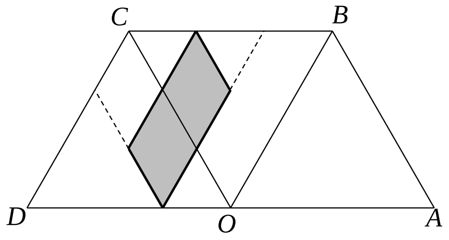
$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-(1-s)\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OB}=-(1-t)\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{1-s}{3}\overrightarrow{OC}-\frac{2-2t}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}t\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}s\overrightarrow{OC}+\frac{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}}{3}$$
$$=\frac{2}{3}t\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}s\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$ は OD 上の定点であり、s, t は独立に変化するから、$\frac{2}{3}t\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}s\overrightarrow{OC}$ が表す点は、平行四辺形を描く。

R が動く範囲を図示すると、右図の通り。



面積は　$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$　……(答)