2017 年東大理 $\boxed{1}$

(1)

$\cos 3\theta = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より

$$f(\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + a(2\cos^2\theta - 1) + b\cos\theta = 4\cos^3\theta + 2a\cos^2\theta + (b-3)\cos\theta - a \quad \cdots\cdots (答)$$

$$\begin{aligned} f(\theta) - f(0) &= 4\cos^3\theta + 2a\cos^2\theta + (b-3)\cos\theta - a - (1+a+b) \\ &= (\cos\theta - 1)\left\{4\cos^2\theta + 2(a+2)\cos\theta + (1+2a+b)\right\} \end{aligned}$$

これより　$g(\theta) = \dfrac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1} = 4\cos^2\theta + 2(a+2)\cos\theta + (1+2a+b)$　……(答)

(2)

$F(t) = 4t^2 + 2(a+2)t + (1+2a+b) = 4\left(t + \dfrac{a+2}{4}\right)^2 - \dfrac{(a+2)^2}{4} + 1 + 2a + b = 4\left(t + \dfrac{a+2}{4}\right)^2 + b - \dfrac{1}{4}a^2 + a$ とする。

$0 < \theta < \pi$ のとき、$-1 < \cos\theta < 1$ であるから、$F(t)$ が $-1 < t < 1$ において最小値 0 をとる条件を考える。

$F(t)$ は下に凸であるから、$-1 < t < 1$ において最小値が存在するには

軸について　$-1 < -\dfrac{a+2}{4} < 1$　$-4 < a+2 < 4$　$\therefore -6 < a < 2$ ——①

①を満たすとき、最小値は $b - \dfrac{1}{4}a^2 + a = 0$ であるから　$b = \dfrac{1}{4}a^2 - a = \dfrac{1}{4}(a-2)^2 - 1$ ——②

求める条件は①かつ②であるから

$$\therefore -6 < a < 2,\ b = \frac{1}{4}(a-2)^2 - 1 \quad \cdots\cdots (答)$$

図示すると右図の通り。