2017年東大理 $\boxed{3}$

(1)

L 上の点は、点 α と原点 O からの距離が常に等しいから

$$|z|=|z-\alpha| \quad \left|\frac{z-\alpha}{z}\right|=\left|\frac{\alpha}{z}-1\right|=|\alpha|\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{\alpha}\right|=1 \quad \therefore \left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha|}$$

したがって、中心は $\dfrac{1}{\alpha}$、半径は $\dfrac{1}{|\alpha|}$ ……(答)

w の軌跡は、円 $\left|w-\dfrac{1}{\alpha}\right|=\dfrac{1}{|\alpha|}$ から原点 O を除いた部分である。

(2)

$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ であるから、z は点 -1 と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線上を動く。

(1) より、w の軌跡は、円 $|w+1|=1$ の一部になる。w が動き得る範囲を調べる。

$z=-\dfrac{1}{2}+bi\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ と書けて、$|z|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+b^2}$ であるから $\therefore \dfrac{1}{2}\leqq|z|\leqq 1 \quad \therefore 1\leqq|w|\leqq 2$

w の軌跡は、円 $|w+1|=1$ のうち、$1\leqq|w|\leqq 2$ を満たす部分である。図示すると右図の通り。