2017年東大理 $\boxed{6}$

(1)

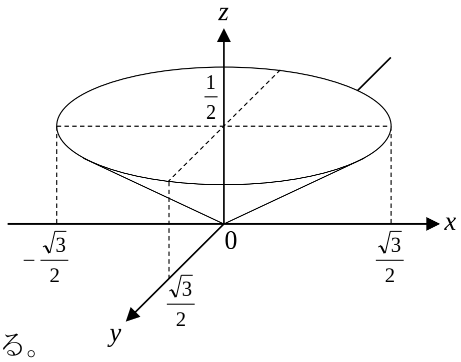
辺 OQ は z 軸上にあり、点 P は、辺 OQ の中点 $\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とした半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の円上を動く。

$P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha,\ \dfrac{1}{2}\right)$ とおけるので、x 座標がとり得る範囲は　$\therefore -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　……(答)

また、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \cos\theta$ であり、$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから　$\therefore 30^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ$　……(答)

(2)

点 Q は、yz 平面上の円 $y^2+z^2=1,\ x=0$ 上を動く。
点 Q を $(0,\ 0,\ 1)$ に固定すると、辺 OP が通過してできる図形は、
右図のような円錐面である。これを C とする。
C を、x 軸中心に一回転したとき通過する部分が、K である。



C の平面 $x=k$ による切り口を求める。対称性から、$0 \leqq k \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で考える。

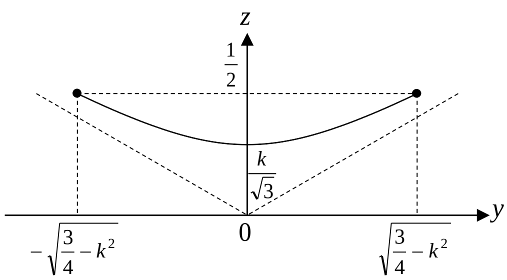
C の xz 平面への正射影を考えると、$x=k$ のとき、$\dfrac{1}{\sqrt{3}}k \leqq z \leqq \dfrac{1}{2}$ である。

C の平面 $z=t$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}k \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ による切り口は、半径 $\sqrt{3}t$ の円 $x^2+y^2=3t^2,\ z=t$ である。

この円と、$x=k$ との交点は、$(k,\ \pm\sqrt{3t^2-k^2},\ t)$ であるから、$y=\pm\sqrt{3t^2-k^2},\ z=t$ より t を消去して

$$y^2 = 3z^2-k^2 \quad \therefore 3z^2-y^2=k^2 \ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}k \leqq z \leqq \frac{1}{2}\right)$$

C の平面 $x=k$ による切り口は、双曲線の一部になる。
平面 $x=k$ において、この曲線上の点と、x 軸との最短距離は



$\dfrac{k}{\sqrt{3}}$ であり、最長距離は $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}-k^2}\right)^2} = \sqrt{1-k^2}$ である。

K の $x=k$ による断面は、ドーナツ型になる。面積は　$S(k)=\pi\left\{(1-k^2)-\dfrac{k^2}{3}\right\}=\pi\left(1-\dfrac{4}{3}k^2\right)$

求める体積は　$2\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} S(k)dk = 2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)dk = 2\pi\left[k-\frac{4}{9}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　……(答)

※2006年後期 $\boxed{2}$ に類題あり。