2017 年東大理$\boxed{4}$文$\boxed{4}$共通

(1)

$\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=\dfrac{-2+\sqrt{5}}{-4+5}=-2+\sqrt{5}$ であるから　$a_n=(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n$

$a_1=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$ ……(答)　$a_2=(9+4\sqrt{5})+(9-4\sqrt{5})=18$ ……(答)

(2)

$$a_1a_n=\left\{(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})\right\}\left\{(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n\right\}$$
$$=(2+\sqrt{5})^{n+1}+(2-\sqrt{5})^{n+1}+(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})\left\{(2+\sqrt{5})^{n-1}+(2-\sqrt{5})^{n-1}\right\}=a_{n+1}-a_{n-1}$$ ……(答)

(3)

(2) より、$n \geqq 2$ において $a_1a_n=4a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$ であるから　$\therefore a_{n+2}=4a_{n+1}+a_n\ (n\geqq 1)$ ――①

(1) より、$a_1,\ a_2$ は自然数であるから、①より、以下帰納的に、$a_3,\ a_4,\ a_5,\ \cdots$ も自然数であることがわかる。

したがって、すべての n について、a_n は自然数である。（証明終）

(4)

$a_2=18=2\times 3^2$ と $a_1=4=2^2$ の最大公約数は、2 である。$a_3=76=2^2\times 19$ と a_2 の最大公約数は、2 である。

すべての n について、a_{n+1} と a_n の最大公約数は、2 であると予想されるので、数学的帰納法により示す。

$n=1,\ 2$ のとき成立。

$n=k$ のとき、a_{k+1} と a_k の最大公約数が 2 であると仮定し、$a_{k+1}=2b_{k+1},\ a_k=2b_k$ とおく。

ここで、$b_{k+1},\ b_k$ は、互いに素な自然数である。

$a_{k+2}=4a_{k+1}+a_k=2(4b_{k+1}+b_k)$ であり、$4b_{k+1}+b_k$ と b_{k+1} の最大公約数を調べる。

$4b_{k+1}+b_k=pk,\ b_{k+1}=qk$ とおくと　$4qk+b_k=pk$　$b_k=(p-4q)k$

これより、k は $b_{k+1},\ b_k$ の公約数であるが、$b_{k+1},\ b_k$ は互いに素であるから、$k=1$ しかあり得ない。

$4b_{k+1}+b_k$ と b_{k+1} の最大公約数は 1 であり、$4b_{k+1}+b_k$ と b_{k+1} は互いに素であることが示された。

したがって、a_{k+2} と a_{k+1} の最大公約数は 2 であり、$n=k+1$ でも成立。

以上により、a_{n+1} と a_n の最大公約数は 2 ……(答)