2018 年東大文 $\boxed{1}$

(1)

放物線Cの原点を通る接線を、$y=kx$とすると

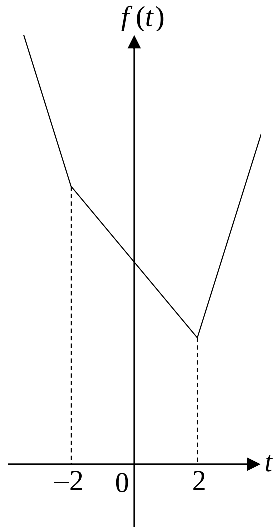
$x^2-3x+4=kx \quad x^2-(k+3)x+4=0 \quad D=(k+3)^2-16=0 \quad (k+3)^2=16$

$k+3=\pm 4 \quad \therefore k=-7,1$

lを$y=-7x$、mを$y=x$とする。$A(t,t^2-3t+4)$とすると

$$L=\frac{|7t+(t^2-3t+4)|}{\sqrt{49+1}}=\frac{|t+2|^2}{5\sqrt{2}} \quad M=\frac{|t-(t^2-3t+4)|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|t-2|^2}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{L}+\sqrt{M}=\frac{|t+2|}{\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}+\frac{|t-2|}{\sqrt[4]{2}}$$



$f(t)=\sqrt{5}\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{L}+\sqrt{M}\right)=|t+2|+\sqrt{5}|t-2|$とすると

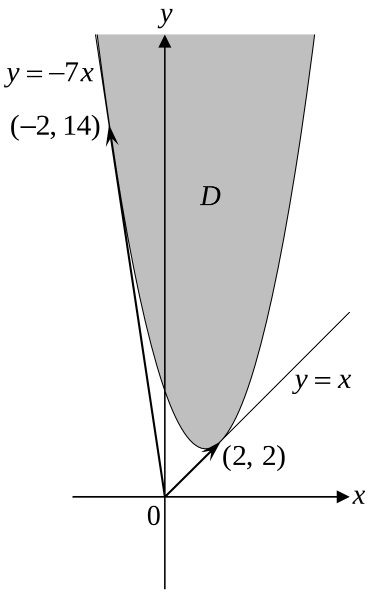
$t\leqq -2$ のとき　$f(t)=(-t-2)+\sqrt{5}(-t+2)=-\left(1+\sqrt{5}\right)t+2\left(-1+\sqrt{5}\right)$

$-2<t\leqq 2$ のとき　$f(t)=(t+2)+\sqrt{5}(-t+2)=\left(1-\sqrt{5}\right)t+2\left(1+\sqrt{5}\right)$

$2<t$のとき　$f(t)=(t+2)+\sqrt{5}(t-2)=\left(1+\sqrt{5}\right)t+2\left(1-\sqrt{5}\right)$

グラフより、$f(t)$は$t=2$ のとき最小になる。

$\sqrt{L}+\sqrt{M}$を最小にするAの座標は　$\therefore (2,2)$ ……(答)



(2)

$\vec{a}=(x,y),\vec{b}=(p,q)$とすると、条件は$\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq 0$ と書ける。

$x^2-3x+4=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ であるから、$\vec{a}\neq(0,0)$である。

$\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq 0$ となる条件は、$\vec{b}=(0,0)$か、$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角が$\dfrac{\pi}{2}$以上か、

いずれかである。$\vec{a}\cdot\vec{b}$の符号は、2 つのベクトルがなす角度で決まる。

$\vec{a}$がとり得る角度範囲は、lとmに挟まれた$y>0$ の領域である。

lと垂直な直線は$y=\dfrac{1}{7}x$、mと垂直な直線は$y=-x$であるから、

求める存在範囲は右図の通り。境界線を含む。