2018年東大文$\boxed{2}$

(1)

$$a_7 = \frac{14!}{7!\,7!\,7!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{7!\,7!} = \frac{2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3}{7!} = \frac{13 \cdot 11}{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{143}{210} < 1$$

$\therefore a_7 < 1$ ……(答)

(2)

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!\,n!\,n!} \quad a_{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!\,(n-1)!}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(2n)!}{n!\,n!\,n!} \cdot \frac{(n-1)!\,(n-1)!\,(n-1)!}{(2n-2)!} = \frac{2n \cdot (2n-1)}{n \cdot n \cdot n} = \frac{2(2n-1)}{n^2}$$

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2(2n-1)}{n^2} < 1$ とすると　$n^2 > 4n-2$　$n^2 - 4n + 2 > 0$　$2 - \sqrt{2} < n, n < 2 + \sqrt{2}$

$0 < 2 - \sqrt{2} < 1, 3 < 2 + \sqrt{2} < 4$ より　$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ となる範囲は　$\therefore 4 \leqq n$ ……(答)

(3)

$a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5 > \cdots$ であるから、a_nは$n = 3$ のとき最大となり、$3 \leqq n$において単調減少である。
$7 \leqq n$において$a_n < 1$ であり、以降a_nが整数となることはない。

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = \frac{10}{9}a_2 = \frac{10}{3},\ a_4 = \frac{7}{8}a_3 = \frac{35}{12},\ a_5 = \frac{18}{25}a_4 = \frac{21}{10},\ a_6 = \frac{11}{18}a_5 = \frac{77}{60}$$

求めるnは　$\therefore n = 1, 2$ ……(答)

※理系$\boxed{2}$の類題。