2018 年東大理 $\boxed{1}$

$$f'(x)=\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}-\sin x=\frac{\sin x-\sin^3 x - x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{\sin x\,(1-\sin^2 x)-x\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin x\cos^2 x - x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{\cos x\,(\sin x\cos x - x)}{\sin^2 x}=\frac{\cos x\,(\sin 2x-2x)}{2\sin^2 x}$$

$g(x)=\sin 2x-2x$とすると　$g'(x)=2(\cos 2x-1)$　$0<2x<2\pi$より　$g'(x)<0$
$g(x)$は $0<x<\pi$において単調減少であるから、$g(0)=0$ より、$g(0)<0$ である。

したがって、$f(x)$の増減は右の通り。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\frac{\pi}{2}$	↗	

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$ より　$\therefore\ \displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=2$ ……(答)

$\displaystyle\lim_{x\to\pi-0}\frac{x}{\sin x}=+\infty$より　$\therefore\ \displaystyle\lim_{x\to\pi-0}f(x)=+\infty$ ……(答)