2018年東大理$\boxed{2}$

(1)

$$a_n=\frac{(2n+1)!}{(n+1)!\,n!\,n!}\quad a_{n-1}=\frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!\,(n-1)!}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(2n+1)!}{(n+1)!\,n!\,n!}\cdot\frac{n!\,(n-1)!\,(n-1)!}{(2n-1)!}=\frac{(2n+1)\cdot 2n}{(n+1)\cdot n\cdot n}=\frac{2(2n+1)}{n(n+1)}$$

nと$n+1$の一方は偶数であるから、$\dfrac{n(n+1)}{2}$は整数である。今、$\dfrac{n(n+1)}{2}=pk, 2n+1=qk$とすると

$$n=\frac{qk-1}{2}\quad n(n+1)=\frac{qk-1}{2}\cdot\frac{qk+1}{2}=2pk\quad q^2k^2-1=8pk\quad k(q^2k-8p)=1$$

したがって、$k=1$しかあり得ない。すなわち、$\dfrac{n(n+1)}{2}$と$2n+1$は、互いに素であるから

$$\therefore p_n=\frac{n(n+1)}{2},\ q_n=2n+1\ \cdots\cdots(答)$$

(2)

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)}\leqq 1$とすると　$n^2+n\geqq 4n+2$　$n^2-3n-2\geqq 0$　$\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\leqq n$

$3<\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}<4$より　$4\leqq n$のとき$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$　$n\leqq 3$のとき$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}>1$

$a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5 > \cdots$であるから、$a_n$は$n=3$のとき最大となり、$3\leqq n$において単調減少である。

$$a_1=3,\ a_2=5,\ a_3=\frac{7}{6}a_2=\frac{35}{6},\ a_4=\frac{9}{10}a_3=\frac{21}{4},\ a_5=\frac{11}{15}a_4=\frac{77}{20},\ a_6=\frac{13}{21}a_5=\frac{143}{60},$$

$$a_7=\frac{15}{28}a_6=\frac{143}{112},\ a_8=\frac{17}{36}a_7=\frac{2431}{4032}$$

$8\leqq n$において$a_n<1$であり、以降a_nが整数となることはない。
求めるnは　$\therefore n=1,2\ \cdots\cdots(答)$

※(2)は(1)を利用する方がスマートなのだろうが、減少性に着目した方が論述しやすい。