2018年東大理$\boxed{3}$

$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}p\\p^2\end{pmatrix}(-1\leqq p\leqq 1),\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}q\\0\end{pmatrix}(0\leqq q\leqq 1)$とすると　$\overrightarrow{OR}=\dfrac{1}{k}\begin{pmatrix}p\\p^2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}q\\0\end{pmatrix}$

$X=\dfrac{1}{k}p+kq, Y=\dfrac{1}{k}p^2$とすると　$p=k(X-kq)$　$\therefore Y=k(X-kq)^2\ \left(-\dfrac{1}{k}+kq\leqq X\leqq\dfrac{1}{k}+kq\right)$

放物線$y=kx^2$のうち$-\dfrac{1}{k}\leqq x\leqq\dfrac{1}{k}$を満たす部分を$C'$とする。

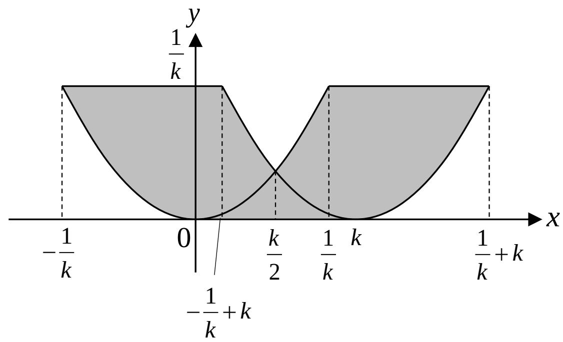
C'をx軸の正方向にk移動させるとき、C'が通過する領域が、点Rが動く領域である。

$\dfrac{k}{2}<\dfrac{1}{k}$　$0<k<\sqrt{2}$のとき　点Rが動く領域を図示すると、右図の通り。対称性より

$$\frac{1}{2}S(k)=\int_{\frac{k}{2}}^{\frac{1}{k}}kx^2dx+\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{k}+k-\frac{1}{k}\right)-\int_0^{\frac{1}{k}}kx^2dx$$

$$=1-k\int_0^{\frac{k}{2}}x^2dx=1-k\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{k}{2}}=1-\frac{k^4}{24}$$

$$\therefore S(k)=2-\frac{k^4}{12}$$

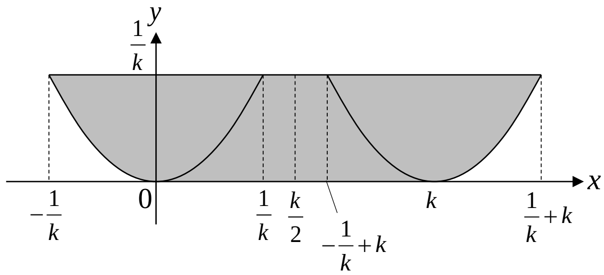


$\dfrac{k}{2}\geqq\dfrac{1}{k}$　$\sqrt{2}\leqq k$のとき　点Rが動く領域を図示すると、右図の通り。対称性より

$$S(k)=\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{k}+k+\frac{1}{k}\right)-2\int_0^{\frac{1}{k}}kx^2dx$$

$$=1+\frac{2}{k^2}-2k\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{k}}=1+\frac{2}{k^2}-\frac{2}{3k^2}=1+\frac{4}{3k^2}$$

$$\therefore S(k)=1+\frac{4}{3k^2}$$



以上により　$0<k<\sqrt{2}$のとき $S(k)=2-\dfrac{k^4}{12}$　$\sqrt{2}\leqq k$のとき $S(k)=1+\dfrac{4}{3k^2}$ ……(答)

これより　$\displaystyle\lim_{k\to+0}S(k)=2,\lim_{k\to\infty}S(k)=1$ ……(答)