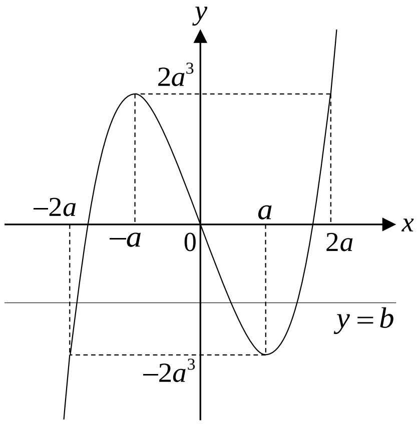
2018年東大理 $\boxed{4}$

$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$

$f(x)$の増減は右の通り。

$f(\pm a) = \mp 2a^3$であるから、$y = f(x)$のグラフは右図の通り。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗



条件1より、$y = f(x)$と$y = b$のグラフの共有点の個数を考えれば

$\therefore -2a^3 < b < 2a^3$ ——①

条件2より、$\beta > 0$であるから$b < 0$である。

$\beta < a$であるから、$a > 1$である必要がある。

$f(x)$は$-a < x < a$で単調減少であるから、$a > 1$の条件下で、

$\beta > 1$となるには　$b < f(1)$　$\therefore b < 1 - 3a^2$ ——②

以上①、②より　$\therefore a > 1$かつ$-2a^3 < b < 1 - 3a^2$ ……(答)

図示すると右図の通りで、境界線は含まない。

曲線$b = -2a^3$と$b = 1 - 3a^2$は、点$(1, -2)$において接している。