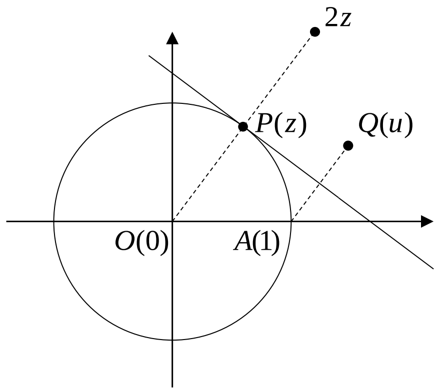
2018年東大理 $\boxed{5}$

(1)

点Pにおける円Cの接線上の点をyとすると　$|y|=|y-2z|$

AQはOPと平行であるから、kを実数として$u=1+kz$とおける。



AQの中点 $1+\frac{k}{2}z$は、上記の接線上にあるから

$$\left|1+\frac{k}{2}z\right|=\left|1+\left(\frac{k}{2}-2\right)z\right| \quad \left|1+\frac{k}{2}z\right|^2=\left|1+\left(\frac{k}{2}-2\right)z\right|^2$$

$$\left(1+\frac{k}{2}z\right)\left(1+\frac{k}{2}\bar{z}\right)=\left(1+\left(\frac{k}{2}-2\right)z\right)\left(1+\left(\frac{k}{2}-2\right)\bar{z}\right)$$

$z\bar{z}=|z|^2=1$ より

$$1+\frac{k}{2}(z+\bar{z})+\frac{k^2}{4}=1+\left(\frac{k}{2}-2\right)(z+\bar{z})+\left(\frac{k}{2}-2\right)^2 \quad -2(z+\bar{z})-2k+4=0 \quad \therefore k=2-(z+\bar{z})$$

代入して　$u=1+\left(2-(z+\bar{z})\right)z=1+2z-z^2-z\bar{z}=2z-z^2$　$\therefore u=2z-z^2$ ⋯⋯(答)

$w=\frac{1}{1-2z+z^2}=\frac{1}{(z-1)^2}$ より　$\frac{\bar{w}}{w}=\frac{(z-1)^2}{(\bar{z}-1)^2}=\frac{(z-1)^2}{\left(\frac{1}{z}-1\right)^2}=z^2$　$\therefore \frac{\bar{w}}{w}=z^2$ ⋯⋯(答)

$$\frac{|w+\bar{w}-1|}{|w|}=\left|1+\frac{\bar{w}}{w}-\frac{1}{w}\right|=|1+z^2-(z-1)^2|=2|z| \quad \therefore \frac{|w+\bar{w}-1|}{|w|}=2 \text{ ⋯⋯(答)}$$

(2)

$z=e^{i\theta}$とする。条件により、$\cos\theta \leqq \frac{1}{2}$、$\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{5}{3}\pi$の範囲で考える。

$$z-1=(\cos\theta-1)+i\sin\theta=-2\sin^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=-2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right)}=-\frac{\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}=-\frac{1}{2}\left(1+i\cot\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore w=\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{4}\left(1-\cot^2\frac{\theta}{2}+2i\cot\frac{\theta}{2}\right)$$

$x=\frac{1}{4}\left(1-\cot^2\frac{\theta}{2}\right), y=\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}$として、$\cot\frac{\theta}{2}$を消去すると　$x=\frac{1-4y^2}{4}$　$\therefore x=-y^2+\frac{1}{4}$

$\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{5}{3}\pi$より　$\frac{\pi}{6} \leqq \frac{\theta}{2} \leqq \frac{5}{6}\pi$　$\cot\frac{\theta}{2}$は$0<\frac{\theta}{2}<\pi$で単調減少であるから

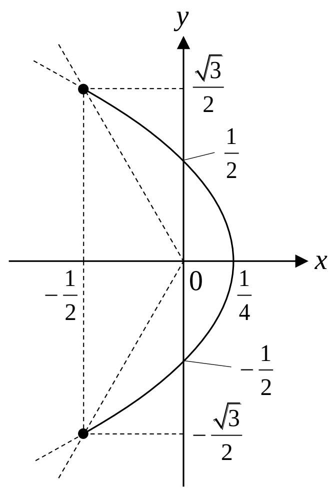
$$-\sqrt{3} \leqq \cot\frac{\theta}{2} \leqq \sqrt{3} \quad \therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$のとき　$\therefore x=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$

以上により、$R(w) = x + iy$の軌跡は

$$\therefore x = -y^2 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} \leqq x\right) \cdots\cdots (\text{答})$$

図示すると右図の通り。



※

(1)で、$u = 2z - z^2$を求めるところが、最難関と思われる。
方法は色々考えられるが、ここでは幾何的に解いた。

(2)で曲線の式を求めるだけなら、(1)より、$x + iy$を
$|w + \overline{w} - 1| = 2|w|$に代入する方が早い。
存在範囲については、偏角で限定するか、絶対値で限定するか、色々考えられる。

$\left|\frac{w + \overline{w}}{2} - \frac{1}{2}\right| = |w|$より、原点を焦点とし、$x = \frac{1}{2}$を準線とする、放物線を表していることがわかる。