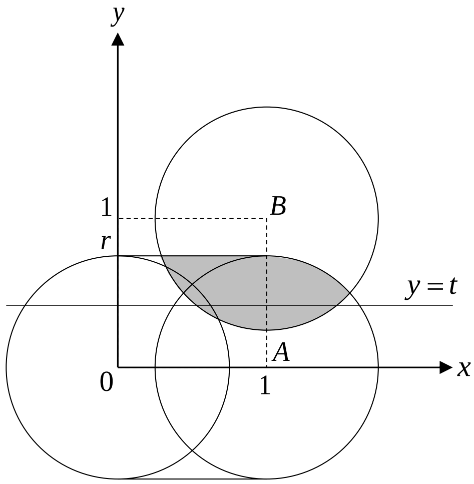
2018 年東大理 $\boxed{6}$

(1)



V_1とV_3のxy平面による断面を図示すると右図の通りであり、
V_1とV_3の共通部分が存在するのは、網掛部である。
これより、$y=t$がV_1とV_3の両方と共有点を持つ範囲は

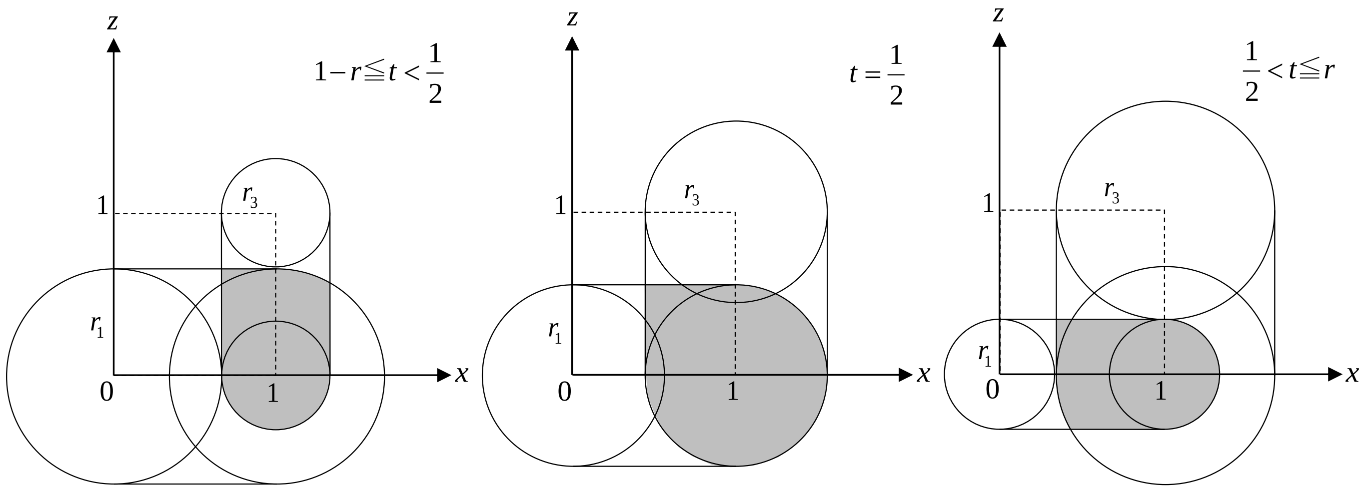
$\therefore 1-r \leqq t \leqq r$ …… (答)

このとき、V_1, V_3の$y=t$による断面は、2 つの半円で
長方形を挟んだ形状になる。

V_1, V_3の$y=t$による断面のうち、円弧部分の半径は、
それぞれ$r_1=\sqrt{r^2-t^2}, r_3=\sqrt{r^2-(1-t)^2}$ であるから

$1-r \leqq t < \dfrac{1}{2}$のとき $r_1 > r_3$　$t=\dfrac{1}{2}$のとき $r_1=r_3$　$\dfrac{1}{2} < t \leqq r$のとき $r_1 < r_3$

それぞれ、$y=t$とV_1, V_3との共通部分を図示すると、下の通り。
横長部が$y=t$とV_1との共通部分、縦長部が$y=t$とV_3との共通部分、網掛部はV_1とV_3の共通部分である。



(2)

$1-r \leqq t \leqq r$において、$y=t$とV_2の共通部分は、$(1,t,0)$を中心とした、半径rの円の周および内部である。
上図の共通部分が、常にこの円の内部に含まれればよい。
上図の共通部分のうち、$(1,t,0)$から最も遠い点は、直角になっている点である。
$(1,t,0)$からこの点までの距離は、$\sqrt{{r_1}^2+{r_3}^2}$で与えられるから、満たすべき条件は

$${r_1}^2+{r_3}^2 \leqq r^2 \quad r^2-t^2+r^2-(1-t)^2-r^2=r^2-1+2t-2t^2 \leqq 0$$

$$2t^2-2t+1-r^2=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-r^2 \geqq 0 \text{——①}$$

$1-r \leqq t \leqq r$の範囲で①が成り立てばよい。①の左辺は$t=\dfrac{1}{2}$のとき最小であるから

$$\frac{1}{2}-r^2 \geqq 0 \quad \therefore \frac{1}{2} < r \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdots\cdots (\text{答})$$

(3)

例えばV_1の体積を$v(V_1)$、V_1, V_2の共通部分の体積を$v(V_1 \cap V_2)$のように表記することにする。

$$v(V) = v(V_1) + v(V_2) + v(V_3) - v(V_1 \cap V_2) - v(V_2 \cap V_3) - v(V_1 \cap V_3) + v(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$$

ここで、V_1, V_3の共通部分はV_2に含まれるので、$v(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = v(V_1 \cap V_3)$である。

$$\therefore v(V) = v(V_1) + v(V_2) + v(V_3) - v(V_1 \cap V_2) - v(V_2 \cap V_3)$$

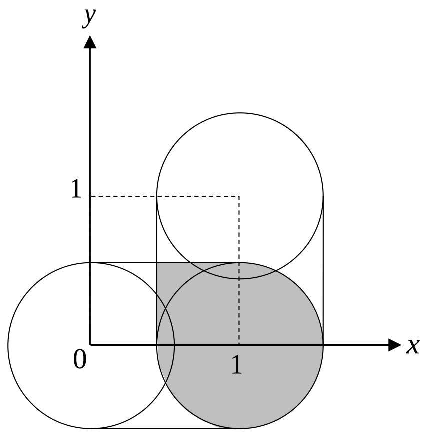
$v(V_1) = v(V_2) = v(V_3) = S, v(V_1 \cap V_2) = v(V_2 \cap V_3) = T$より　$\therefore v(V) = 3S - 2T$ ……(答)

(4)

Sは、半径rの球の体積と、上面・底面の半径r、高さ 1 の円柱の体積の和であるから

$$S = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 \times 1 = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 \text{ ……(答)}$$

次に、V_1, V_2の共通部分の、平面$z = u\ (-r \leqq u \leqq r)$による断面を考える。
図示すると右図の通りで、円弧部分の半径は$\sqrt{r^2 - u^2}$であるから、
断面積は



$$\frac{3}{4}\pi\left(\sqrt{r^2 - u^2}\right)^2 + \left(\sqrt{r^2 - u^2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right)(r^2 - u^2)$$

これより

$$T = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right)\int_{-r}^{r}(r^2 - u^2)du = \left(\frac{3}{2}\pi + 2\right)\int_{0}^{r}(r^2 - u^2)du$$

$$= \left(\frac{3}{2}\pi + 2\right)\left[r^2 u - \frac{u^3}{3}\right]_0^r = \left(\pi + \frac{4}{3}\right)r^3 \text{ ……(答)}$$

以上により

$$v(V) = 3S - 2T = 3\left(\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2\right) - 2\left(\pi + \frac{4}{3}\right)r^3 = \left(2\pi - \frac{8}{3}\right)r^3 + 3\pi r^2 \text{ ……(答)}$$