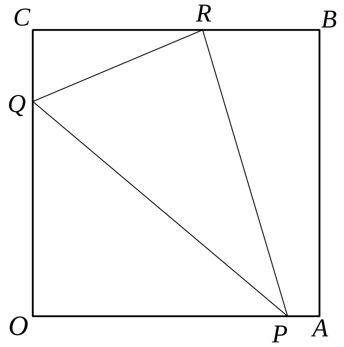
2019年東大文$\boxed{1}$

(1)



$\triangle OPQ$, $\triangle OPR$, $\triangle OQR$の面積を、それぞれS_1, S_2, S_3とする。

$$S_1=\frac{1}{2}pq=\frac{1}{3}\quad q=\frac{2}{3p}\leqq 1\quad \therefore \frac{2}{3}\leqq p\leqq 1 \text{——①}$$

①の範囲でqは単調減少である。　$\therefore \dfrac{2}{3}\leqq q\leqq 1$

四角形$OPRQ$の面積は$\dfrac{2}{3}$であるから

$$S_2+S_3=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}qr=\frac{2}{3}\quad \frac{1}{2}qr=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}p$$

$$\therefore r=\frac{2}{q}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}p\right)=3p\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}p\right)=2p-\frac{3}{2}p^2=-\frac{3}{2}\left(p-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

rは①の範囲で単調減少である。　$\therefore \dfrac{1}{2}\leqq r\leqq \dfrac{2}{3}$

以上により、$q=\dfrac{2}{3p}$, $r=2p-\dfrac{3}{2}p^2$であり、$\dfrac{2}{3}\leqq p\leqq 1$, $\dfrac{2}{3}\leqq q\leqq 1$, $\dfrac{1}{2}\leqq r\leqq \dfrac{2}{3}$ ……(答)

(2)

$$\therefore \frac{CR}{OQ}=\frac{3}{2}p\left(2p-\frac{3}{2}p^2\right)=3p^2-\frac{9}{4}p^3$$

$f(p)=3p^2-\dfrac{9}{4}p^3$とすると　$f'(p)=6p-\dfrac{27}{4}p^2=\dfrac{27}{4}p\left(\dfrac{8}{9}-p\right)$

増減は右の通り。

p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		＋	0	－	
$f(p)$		↗		↘	

$$f\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{64}{81}\left(3-\frac{9}{4}\cdot\frac{8}{9}\right)=\frac{64}{81}\quad f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}\left(3-\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\quad f(1)=\frac{3}{4}$$

最大値は$\dfrac{64}{81}$、最小値は$\dfrac{2}{3}$ ……(答)

※理系$\boxed{2}$とほぼ同じ。