2019年東大文$\boxed{2}$

(1)

直線lの方程式は、$x+y=4$である。条件1より　$8 \leqq 2p+2q \leqq 17$　$\therefore 4 \leqq p+q \leqq \dfrac{17}{2}$ ――①

cはOAの長さに等しく、$c=2\sqrt{2}$。①より　$qd=\dfrac{|p+q-4|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{p+q-4}{\sqrt{2}}$

条件2より

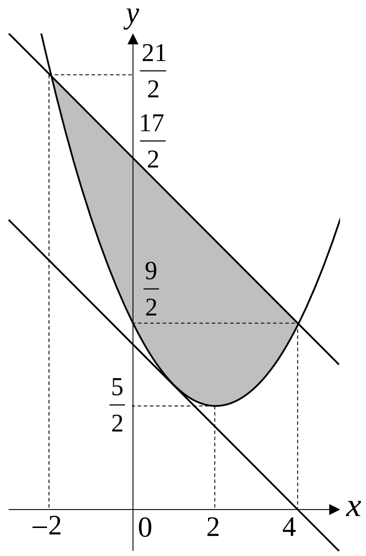
$$cd=2(p+q-4) \geqq (p-1)^2 \quad 2q \geqq p^2-4p+9 \quad q \geqq \frac{1}{2}p^2-2p+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}(p-2)^2+\frac{5}{2}$$

$\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{9}{2}=4-x$とすると　$(x-1)^2=0$

直線$x+y=4$は、点$(1,3)$で放物線$\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{9}{2}$に接する。

$\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{9}{2}=\dfrac{17}{2}-x$とすると　$x^2-2x-8=(x+2)(x-4)=0$

直線$x+y=\dfrac{17}{2}$と放物線$\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{9}{2}$の交点は、$\left(-2,\dfrac{21}{2}\right),\left(4,\dfrac{9}{2}\right)$。



領域Dを図示すると、右図の通り。境界線を含む。面積は

$$\int_{-2}^{4}\left\{\left(\frac{17}{2}-x\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}\right)\right\}dx=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}(x-4)(x+2)dx$$

$$=\frac{(4+2)^3}{2\cdot 6}=18 \cdots\cdots (答)$$

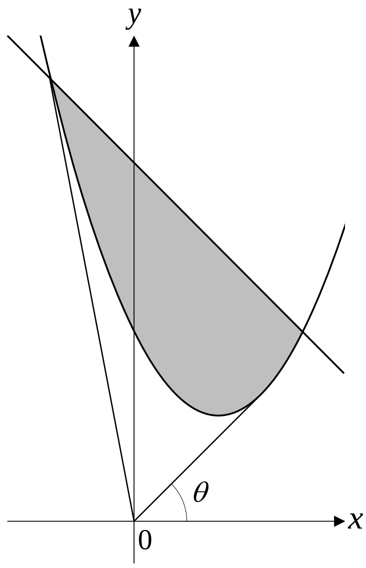
(2)

原点を通り、放物線$\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{9}{2}$に接する接線を考える。接点を$\left(t-2,\dfrac{1}{2}t^2-2t+\dfrac{9}{2}\right)$とすると、

接線の方程式は　$y=(t-2)(x-t)+\dfrac{1}{2}t^2-2t+\dfrac{9}{2}=(t-2)x-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{9}{2}$

これが原点を通るとき　$0=-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{9}{2}$　$t^2=9$　$t=\pm 3$

このうち、$t=-3$は領域Dに含まれない。右図より



$\cos\theta$が最大になるのは、点$(3,3)$で接するときであり、$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

$\cos\theta$が最小になるのは、点$\left(-2,\dfrac{21}{2}\right)$を通るときであり、$\tan\theta=-\dfrac{21}{4}$より

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\left(\frac{21}{4}\right)^2}=\frac{16}{457} \qquad \cos\theta=-\frac{4}{\sqrt{457}}$$

以上により　$-\dfrac{4}{\sqrt{457}} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdots\cdots (答)$