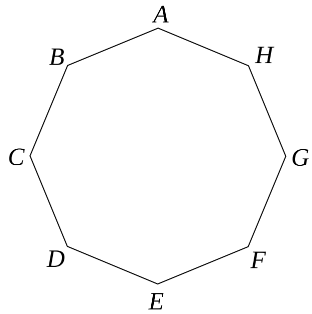
2019年東大文$\boxed{3}$

以下、反時計回りを「←」、時計回りを「→」と表す。



(1)

10回の操作において、

　i)「←」と「→」が5回ずつ

　ii)「←」が9回、「→」が1回　　iii)「←」が1回、「→」が9回

のいずれかである。

i)の場合が${}_{10}C_5 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 4 \cdot 7 = 252$通り、ii) iii)の場合がそれぞれ${}_{10}C_1 = 10$通りであるから

求める確率は　$\dfrac{252+20}{2^{10}} = \dfrac{272}{2^{10}} = \dfrac{17}{2^6} = \dfrac{17}{64}$ ……(答)

(2)

上記の ii) iii)の場合は、一周するから必ずFを通る。計20通り。

i)の場合において、Fを通る経路を考える。

途中でFに到達するのは奇数回目であり、1回目では到達せず、9回目に到達しても10回目にAに戻れない。

3回目に初めてFに到達するとき

最初に「→」が3回続き、その後の7回中「←」が5回、「→」が2回。

このような経路は${}_7C_2 = 21$通り。

5回目に初めてFに到達するとき

最初の5回が「← → → → →」「→ ← → → →」「→ → ← → →」のいずれかで、その後の5回中「←」が4回、「→」が1回となる経路が$3 \times {}_5C_1 = 15$通り。

また、「← ← ← ← ← → → → → →」となる経路が1通り。

7回目に初めてFに到達するとき

最初の5回中「←」が2回、「→」が3回であり、その後の5回は「→ → ← ← ←」。

ただし、「→ → → ← ← → → ← ← ←」は除く。このような経路は${}_5C_2 - 1 = 9$通り。

求める確率は　$\dfrac{20+21+15+1+9}{2^{10}} = \dfrac{66}{2^{10}} = \dfrac{33}{2^9} = \dfrac{33}{512}$ ……(答)