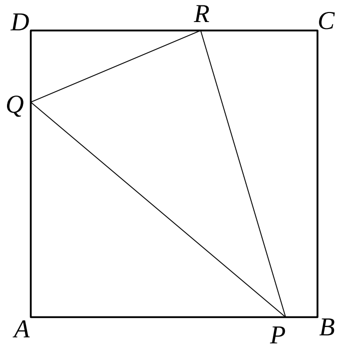
2019年東大理$\boxed{2}$

$\triangle APQ,\ \triangle APR,\ \triangle AQR$の面積を、それぞれ$S_1,\ S_2,\ S_3$とする。



$AP=p, AQ=q$とすると　$S_1=\dfrac{1}{2}pq=\dfrac{1}{3}$　$q=\dfrac{2}{3p}\leqq 1$　$\therefore \dfrac{2}{3}\leqq p\leqq 1$ ——①

四角形$APRQ$の面積は$\dfrac{2}{3}$であるから、$DR=r$とすると

$$S_2+S_3=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}qr=\frac{2}{3}\quad \frac{1}{2}qr=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}p$$

$$\therefore r=\frac{2}{q}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}p\right)=3p\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}p\right)=2p-\frac{3}{2}p^2=-\frac{3}{2}\left(p-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

①の範囲で$\dfrac{1}{2}\leqq r\leqq\dfrac{2}{3}$となるから、条件を満たす。　$\therefore \dfrac{DR}{AQ}=\dfrac{3}{2}p\left(2p-\dfrac{3}{2}p^2\right)=3p^2-\dfrac{9}{4}p^3$

$f(p)=3p^2-\dfrac{9}{4}p^3$とすると　$f'(p)=6p-\dfrac{27}{4}p^2=\dfrac{27}{4}p\left(\dfrac{8}{9}-p\right)$

増減は右の通り。

p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$f\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{64}{81}\left(3-\frac{9}{4}\cdot\frac{8}{9}\right)=\frac{64}{81}\quad f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}\left(3-\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\quad f(1)=\frac{3}{4}$$

最大値は$\dfrac{64}{81}$、最小値は$\dfrac{2}{3}$ $\cdots\cdots$(答)