2019年東大理$\boxed{3}$

(1)

八面体$PABCDE$の、$y=0$による切り口は、四角形$PAEC$である。

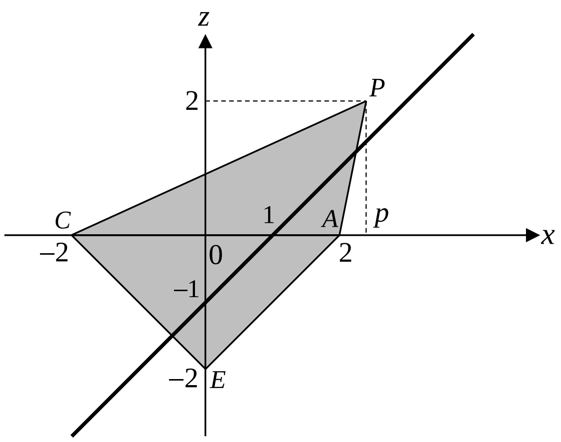
$M(1,1,0), N(1,-1,0)$であり、平面αはMNの中点$(1,0,0)$を通る。

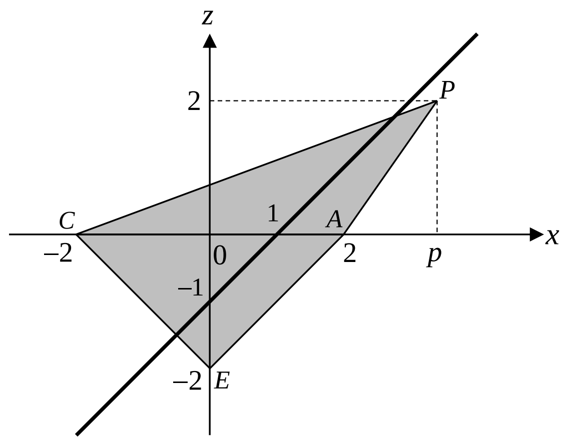
平面αはAEに平行であるから、$y=0$による切り口は、傾き1の直線$z=x-1$になる。

$2<p\leqq 3$のとき、$z=x-1$はAPと交差する($p=3$であれば、点Pを通る)。

$3<p<4$のとき、$z=x-1$はCPと交差する。

図示すると下の通り。





(2)

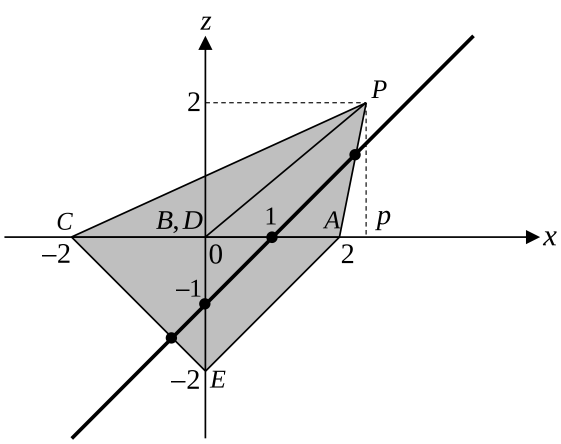
八面体$PABCDE$の平面αよる切り口が八角形になるとき、平面αは8本の辺と交差する。

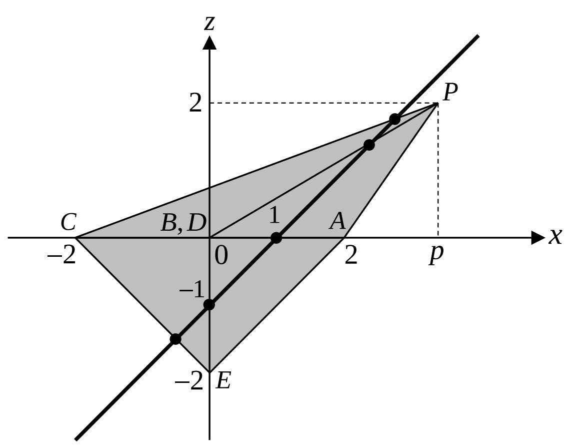
(1)で示した図を利用して、平面αと八面体$PABCDE$の辺との交点を$y=0$上に示すと、下図の通りである。

$2<p\leqq 3$のとき、平面αはCE, BE, AB, DE, AD, APと交差する。6本の辺と交差するから、平面αによる切り口は六角形である。

$3<p<4$のとき、平面αは$CE, BE, AB, BP, DE, AD, DP, CP$と交差する。8本の辺と交差するから、平面$\alpha$による切り口は八角形である。

求める範囲は　$\therefore 3<p<4$ ……(答)





(3)

$3<p<4$のとき、平面αと8辺との交点のうち、$y\geqq 0, z\geqq 0$の範囲にあるのは、AB, BP, CPとの交点である。

平面αとABとの交点は、$M(1,1,0)$である。

平面αとCPとの交点は、$y=0$ における直線 $z=x-1$ と直線$z=\dfrac{2}{p+2}(x+2)$との交点に当たる。

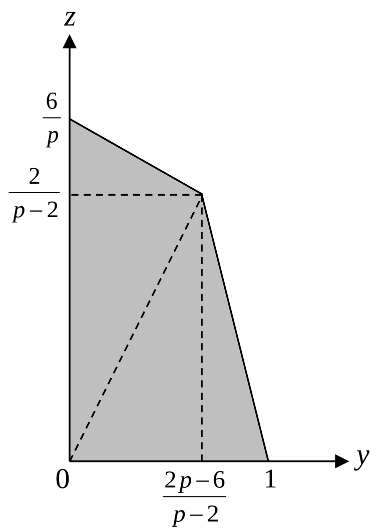
y座標は 0 であるから、平面αとCPとの交点は$\left(1+\dfrac{6}{p},0,\dfrac{6}{p}\right)$である。

$\overrightarrow{BP}=(p,-2,2)$であるから、線分$BP$上の点は、$0\leqq t\leqq 1$ として$\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}p\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}pt\\2-2t\\2t\end{pmatrix}$とおける。

$z=x-1$ と交差するから　$2t=pt-1$　$t=\dfrac{1}{p-2}<1$　このとき　$2-2t=\dfrac{2p-6}{p-2}$

平面αとBPとの交点は、$\left(\dfrac{p}{p-2},\dfrac{2p-6}{p-2},\dfrac{2}{p-2}\right)$である。

以上により、座標平面上で(y,z)が動く範囲は右図の通りである。



この面積は、2 つの三角形に分割して考えれば

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{p-2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{p}\cdot\frac{2p-6}{p-2}=\frac{1}{p-2}+\frac{6p-18}{p(p-2)}=\frac{7p-18}{p(p-2)}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$