2019 年東大理 $\boxed{4}$

(1)

p, qを互いに素な自然数とし、$n^2+1=pd_n, 5n^2+9=qd_n$とすると

　$5pd_n+4=qd_n$　$4=(q-5p)d_n$

d_nは 4 の正の約数であるから、$d_n=1,2,4$ に限られる。

nが偶数のとき　$n^2+1, 5n^2+9$ はともに奇数であり、$d_n=1$ しかあり得ない。

nが奇数のとき　$n=2m-1$ とすると

　$n^2+1=4m^2-4m+2=2(2m^2-2m+1)$　$5n^2+9=20m^2-20m+14=2(10m^2-10m+7)$

$2m^2-2m+1, 10m^2-10m+7$ はともに奇数であるから、$d_n=2$ しかあり得ない。

以上により　nが偶数のとき$d_n=1$、nが奇数のとき$d_n=2$ ……(答)

(2)

nが偶数のとき

$n^2+1, 5n^2+9$ は互いに素であるから、$(n^2+1)(5n^2+9)$が平方数であれば、$n^2+1, 5n^2+9$ はともに平方数でなければならない。

$n^2+1=a^2$とすると　$1=a^2-n^2=(a+n)(a-n)$

$a+n=a-n=1$ より、$a=1, n=0$ となるが、nは自然数であるから不適。

少なくとも、n^2+1 は平方数ではないから、$(n^2+1)(5n^2+9)$は平方数ではない。

nが奇数のとき

p, qを互いに素な自然数として、$n^2+1=2p, 5n^2+9=2q$と書けるから　$(n^2+1)(5n^2+9)=4pq$

$(n^2+1)(5n^2+9)$が平方数であれば、pqは平方数であり、p, qはともに平方数である。

$p=a^2, q=b^2$とする。(1) より、$q=5p+2$であるから　$5a^2+2=b^2$　$b^2-a^2=4a^2+2$ ――①

ここで、①の右辺は偶数であるから、左辺も偶数であり、bとaの奇遇は一致する。

すると、$b^2-a^2=(b+a)(b-a)$であり、$b+a, b-a$は偶数であるから、①の左辺は 4 の倍数である。

ところが、①の右辺は4の倍数ではないから、矛盾する。

p, qがともに平方数にはならないから、$(n^2+1)(5n^2+9)$は平方数ではない。

以上により示された。(証明終)