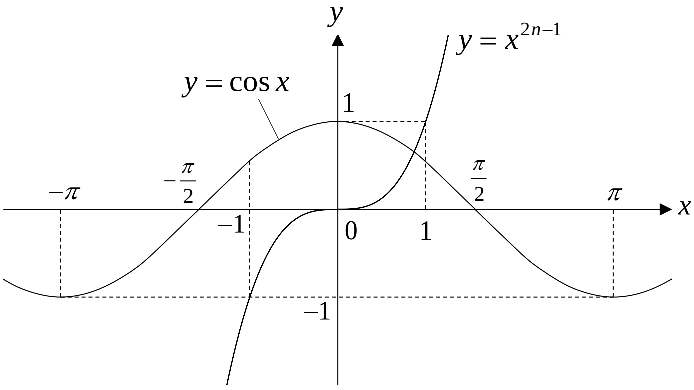
2019年京大理$\boxed{5}$

(1)



x^{2n-1}は奇関数であるから

$x<-1, 1<x$のとき

$x^{2n-1}<-1, 1<x^{2n-1}$　$-1 \leqq \cos x \leqq 1$

この範囲に実数解はない。

$-1 \leqq x < 0$のとき

$-1 \leqq x^{2n-1} < 0$　$0 < \cos 1 \leqq \cos x < 1$

この範囲に実数解はない。

$0 \leqq x \leqq 1$のとき　$f(x)=x^{2n-1}-\cos x$とすると

$f'(x)=(2n-1)x^{2n-2}+\sin x \geqq 0$より、$0 \leqq x \leqq 1$において単調増加。

$f(0)=-1<0, f(1)=1-\cos 1>0$より、$0<x<1$においてただ一つの実数解$a_n$を持つ。

以上により示された。(証明終)

(2)

$0 \leqq x \leqq 1$において$\cos x$は単調減少であり、$0<a_n<1$であるから　$\therefore \cos a_n > \cos 1$　(証明終)

(3)

$0<a_n<1$であり、$\cos 1<\cos a_n<\cos 0=1$である。$\cos a_n = {a_n}^{2n-1}$であるから

$\cos 1 < {a_n}^{2n-1} < 1$　$(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} < a_n < 1$　$n \to \infty$のとき、$\dfrac{1}{2n-1} \to 0$、$(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} \to 1$ であるから

はさみうちの原理により　$\therefore a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ ……(答)

${a_n}^{2n-1}=\cos a_n$ より　${a_n}^{2n}=a_n \cos a_n$　${a_n}^n=\sqrt{a_n \cos a_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ であるから　$\therefore b=\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^n = \sqrt{\cos 1}$ ……(答)

$\dfrac{{a_n}^n-b}{a_n-a}=\dfrac{\sqrt{a_n\cos a_n}-\sqrt{\cos 1}}{a_n-1}$ であり、$g(x)=\sqrt{x\cos x}$ とすると、平均値の定理により、

$\dfrac{g(a_n)-g(1)}{a_n-1}=g'(\alpha)$を満たす$a_n<\alpha<1$ なる実数αが存在する。

$g'(x)=\dfrac{(x\cos x)'}{2\sqrt{x\cos x}}=\dfrac{\cos x - x\sin x}{2\sqrt{x\cos x}}$ であり、$n\to\infty$のとき、$a_n \to 1$、$\alpha \to 1$ であるから

$\therefore \mathrm{c}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{{a_n}^n-b}{a_n-a}=\lim\limits_{\alpha\to 1}\dfrac{\cos\alpha-\alpha\sin\alpha}{2\sqrt{\alpha\cos\alpha}}=\dfrac{\cos 1-\sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}$ ……(答)