2019年京大理$\boxed{6}$

(1)

条件2より、実数係数の4次方程式であるから、考えられる解の組合せは

　i)4つの実数解　ii)2組の共役な虚数解　iii)2つの実数解と1組の共役な虚数解

のいずれかである。条件3により、i)は不適。

ii)の場合を考える。4つの虚数解を、$x,\ \bar{x},\ y,\ \bar{y}$とする。$\alpha = x$と固定しても一般性を失わない。

　$\beta = \bar{x}$のとき　$\alpha\beta + \gamma\delta = x\bar{x} + y\bar{y} = |x|^2 + |y|^2$は実数であり、不適。

　$\beta = y$のとき　$\alpha\beta + \gamma\delta = xy + \bar{x}\bar{y}$は共役な複素数の和であるから実数であり、不適。

　$\beta = \bar{y}$のとき　$\alpha\beta + \gamma\delta = x\bar{y} + \bar{x}y$は共役な複素数の和であるから実数であり、不適。

いずれにしても、条件3よりii)は不適。

以上により、iii)の場合しかあり得ない。(証明終)

(2)

4次方程式の解と係数の関係より

　$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2$ ――① 　$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = 0$ ――②

　$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = 2a$ ――③ 　$\alpha\beta\gamma\delta = b$ ――④

$p,\ q,\ r,\ s$を実数とし、4つの解を$p,\ q,\ r+si,\ r-si$とおく。

$\alpha = p$とする。$\beta = q$とすると、$\alpha\beta + \gamma\delta$が実数になるので不適。$\beta = r+si$とすると

　$\alpha\beta + \gamma\delta = p(r+si) + q(r-si) = r(p+q) + s(p-q)i$

条件3より$s \neq 0,\ p \neq q$であり、$r(p+q) = 0$である。

$r = 0$かつ$p + q = 0$とすると$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$となり、①を満たさない。$r = 0$または$p + q = 0$である。

$\beta = r - si$としても同じである。

$r = 0$のとき

①より$p + q = 2$であり、4つの解は$p,\ 2-p,\ si,\ -si$とおける。ただし$p \neq 1$。②、③、④に代入すると

　$p(2-p) + s^2 = 0$　$2s^2 = 2a$　$p(2-p)s^2 = b$　$\therefore a = s^2 > 0, b = -s^4 = -a^2$

$p + q = 0$のとき

①より$r = 1$であり、4つの解は$p,\ -p,\ 1+si,\ 1-si$とおける。ただし$p \neq 0$。②、③、④に代入すると

$-p^2 + 1 + s^2 = 0$　$-2p^2 = 2a$　$-p^2(1+s^2) = b$　$\therefore a = -p^2 < 0, b = -p^4 = -a^2$

以上により、いずれにしても　$\therefore b = -a^2$ ……(答)

(3)

$r = 0$のとき

$a > 0$であり、$s = \sqrt{a},\ p^2 - 2p - a = 0$より$p = 1 \pm \sqrt{1+a}$であるから

4つの解は$1 + \sqrt{1+a},\ 1 - \sqrt{1+a},\ \sqrt{a}i,\ -\sqrt{a}i$とおける。

$\alpha,\ \beta$のうち一方は実数、一方は複素数であるから、$\alpha + \beta = 1 \pm \sqrt{1+a} \pm \sqrt{a}i$ (複号任意)とおける。

$x = 1 \pm \sqrt{1+a}, y = \pm\sqrt{a}$として、$a$を消去すると

　$(x-1)^2 = 1 + a = 1 + y^2$　$\therefore (x-1)^2 - y^2 = 1$

ただし、$a > 0$より、$x < 0,\ 2 < x$である。

$p+q=0$ のとき

$a<0$であり、$p=\sqrt{-a},\ 1+s^2=-a$より $s=\sqrt{-1-a}$　ただし$a<-1$

4 つの解は$\sqrt{-a},\ -\sqrt{-a},\ 1+\sqrt{-1-a}i,\ 1-\sqrt{-1-a}i$とおける。

$\alpha,\ \beta$のうち一方は実数、一方は複素数であるから、$\alpha+\beta=1\pm\sqrt{-a}\pm\sqrt{-1-a}i$ (複号任意)とおける。

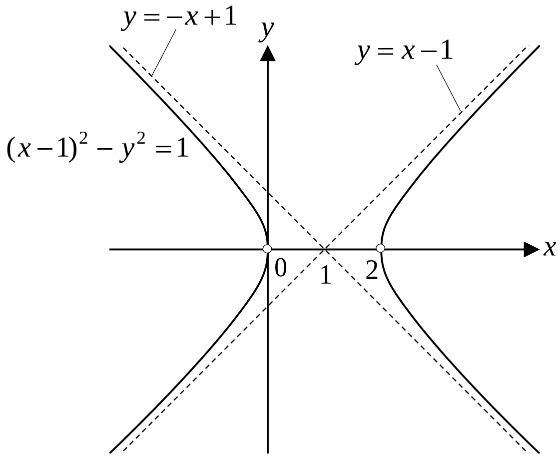
$x=1\pm\sqrt{-a}, y=\pm\sqrt{-1-a}$として、$a$を消去すると

$(x-1)^2=-a=1+y^2 \quad \therefore (x-1)^2-y^2=1$

ただし、$a<-1$より、$x<0,\ 2<x$である。

以上により、いずれにしても、$\alpha+\beta$がとり得る範囲は、
複素数平面上の双曲線$(x-1)^2-y^2=1$上である。
ただし、点$(2,\ 0),\ (0,\ 0)$は除く。

図示すると右図の通り。
直線$y=\pm(x-1)$は漸近線である。



※四次方程式の解と係数の関係は、断りなく用いない方が無難か。