2020 年東大文 $\boxed{1}$

$f(x)=x^3-3ax^2+b$とすると　$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

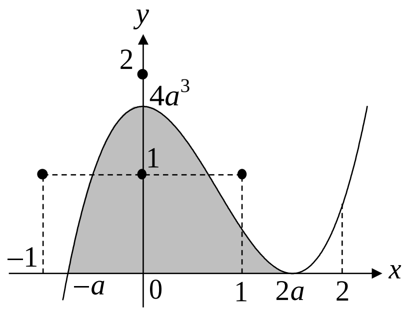
$f(x)$の増減は右の通り。極大値$f(0)=b$は正であるから、

　$f(2a)=-4a^3+b=0$　$\therefore b=4a^3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(x)=(x-2a)^2(x+a)$であるから、Cとx軸で囲まれた領域は

右図のようになる。



$(-1,1)$や$(1,1)$が条件 2 を満たすとき、$(0,1)$も条件を満たす。

条件 2 を満たすただ 1 つの点が、$(0,1)$であるとすると

$1<f(0)\leqq 2$ より　$1<4a^3\leqq 2$　$\dfrac{1}{4}<a^3\leqq\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}<a\leqq\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ――①

①が成立するとき、$-1<-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\leqq -a$であるから、$f(-1)<0$ となり、$f(-1)\leqq 1$ を満たす。

また、①が成立するとき、$1<\sqrt[3]{2}<2a\leqq\sqrt[3]{4}<2$ であるから、$f(1)\leqq 1$ となる条件を考える。

　$f(1)=1-3a+4a^3\leqq 1$　$a(4a^2-3)\leqq 0$　$0<a\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ――②

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^6-\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^6=\dfrac{27}{64}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{11}{64}>0$ より、$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$であるから、①が成立するとき、②も成立する。

以上により　$b=4a^3$ ……(答)　aの範囲は　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}<a\leqq\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ……(答)