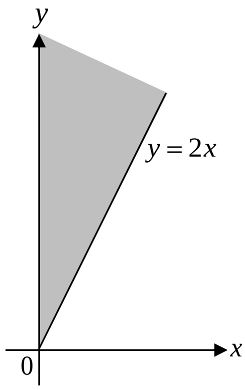
2020 年東大文 $\boxed{3}$

(1)

$P(t, t^2-2t+4)\ (t \geqq 0)$とする。$t=0$のとき、半直線$OP$は、$y$軸の$y \geqq 0$の部分である。

$t>0$ のとき、半直線OPの傾きは　$\dfrac{t^2-2t+4}{t}=t+\dfrac{4}{t}-2$



相加平均・相乗平均の関係より　$t+\dfrac{4}{t}-2 \geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{4}{t}}-2=2$

等号成立は　$t=\dfrac{4}{t}$　$t^2=4$　$t=2$ のとき。

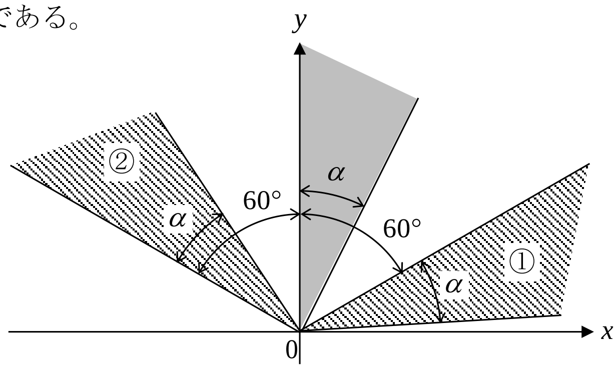
半直線OPの通過領域は、$x \geqq 0$ かつ$y \geqq 2x$となり、右図の通り。
境界線を含む。

(2)

半直線OAの通過範囲内で、$\angle AOB=60°$となることが条件である。
$y=2x$がy軸となす角度を α とする。すなわち、

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$のとき、半直線OBの存在範囲は、右図

の①か②である。境界線を含む。



求めるaの範囲は

$\tan(150°-\alpha) \leqq a \leqq \tan 150°, \tan(30°-\alpha) \leqq a \leqq \tan 30°$

ここで

$$\tan(150°-\alpha)=\frac{\tan 150°-\tan\alpha}{1+\tan 150°\tan\alpha}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}}=-\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}=-\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)}{12-1}=-\frac{8+5\sqrt{3}}{11}$$

$$\tan(30°-\alpha)=\frac{\tan 30°-\tan\alpha}{1+\tan 30°\tan\alpha}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}-1\right)}{12-1}=\frac{-8+5\sqrt{3}}{11}$$

求めるaの範囲は　$\therefore -\dfrac{8+5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{-8+5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ⋯⋯(答)