2020年東大理$\boxed{1}$

(1)

$a<0$のとき、ax^2+bx+cは上に凸である。

$ax^2+bx+c=0$が相違なる2実数解$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$を持つとき、$ax^2+bx+c>0$の解は、$\alpha<x<\beta$である。

$ax^2+bx+c=0$が重解か虚数解を持つとき、$ax^2+bx+c>0$を満たす実数xは存在しない。

a,b,cのうち1つでも負であれば、3つの不等式を満たす共通解は、$x>p$とはならないから、a,b,cはいずれも0以上である。(証明終)

(2)

$a>0$のとき、ax^2+bx+cは下に凸である。

$ax^2+bx+c=0$が相違なる2実数解$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$を持つとき、$ax^2+bx+c>0$の解は、$\mathrm{x}<\alpha,\ \beta<x$である。

$ax^2+bx+c=0$が重解γを持つとき、$ax^2+bx+c>0$を満たすのは$x=\gamma$以外のすべての実数xである。

$ax^2+bx+c=0$が虚数解を持つとき、$ax^2+bx+c>0$を満たすのはすべての実数xである。

a,b,cがすべて正であれば、3つの不等式を満たす共通解は、すべての実数xであるか、ある値を除くすべての実数xであるか、$\mathrm{x}<\alpha,\ \beta<x$という形になるから、$x>p$とはならない。$a,b,c$のうち少なくとも1つは0である。(証明終)

(3)

a,b,cがすべて0であれば、3つの不等式はいずれも成立しないので、a,b,cのうち少なくとも1つは正である。

$a>0,\ b=c=0$のとき

3つの不等式は、$ax^2>0,\ a>0,\ ax>0$であるから、共通解は$x>0$である。　$\therefore p=0$

$b>0,\ c=a=0$のとき、$\mathrm{c}>0,\ a=b=0$のときも同様である。

$a>0,\ b>0,\ c=0$のとき、3つの不等式は

$$ax^2+bx=x(ax+b)>0 \quad \rightarrow \quad x<-\frac{b}{a},0<x \text{ ——①}$$

$$bx^2+a>0 \quad \rightarrow \quad \text{解はすべての実数}x \text{ ——②}$$

$$ax+b>0 \quad \rightarrow \quad x>-\frac{b}{a} \text{ ——③}$$

①、②、③の共通解は$x>0$である。　$\therefore p=0$

$b>0,\ c>0,\ a=0$のとき、$\mathrm{c}>0,\ a>0,\ b=0$のときも同様である。

以上により、$p=0$が示された。(証明終)

※難問ではないが、論述力勝負の問題である。