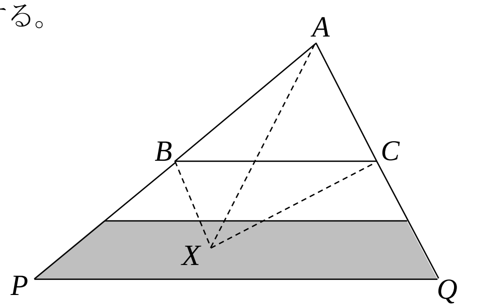
2020年東大理$\boxed{2}$

点Xが三角形ABCの周を含む内部にあるとき、$\triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX = \triangle ABC = 1$であるから、題意を満たす点$X$は、三角形$ABC$の外部にある。

Xが、AB, ACの延長及び辺BCで囲まれた領域にあるとき
BCを底辺とし、三角形ABCの高さをk、三角形BCXの高さをhとする。



このとき、$\triangle BCX = \dfrac{h}{k}$であり、

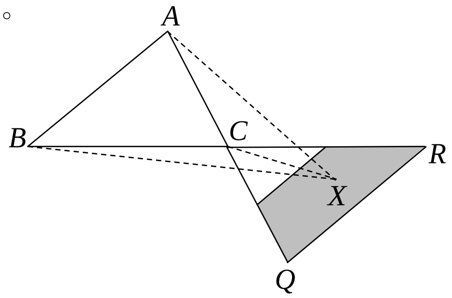
$$\triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX = \triangle ABC + 2 \times \triangle BCX = 1 + \frac{2h}{k}$$

題意を満たすとき　$2 \leqq 1 + \dfrac{2h}{k} \leqq 3$　$\therefore \dfrac{1}{2}k \leqq h \leqq k$

Xが動く範囲は、右図の網掛け部である。

$AB = BP, AC = CQ, BC \parallel PQ$であり、面積は　$4 - 1 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{7}{4}$

Xが、BC, ACの延長で囲まれた領域にあるとき
ABを底辺とし、三角形ABCの高さをk、三角形ABXの高さをhとする。



このとき、$\triangle ABX = \dfrac{h}{k}$であり、

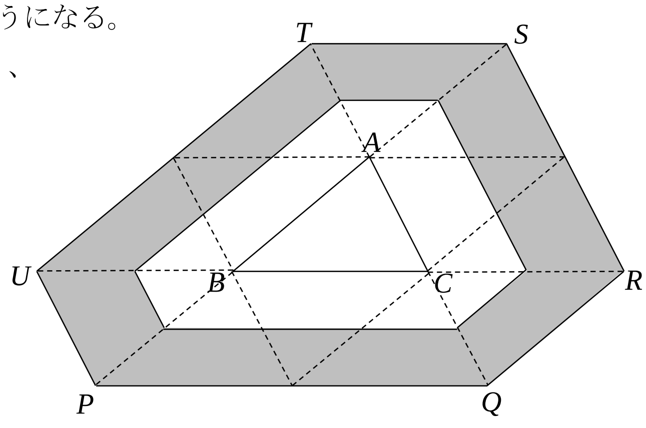
$$\triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX = 2 \times \triangle ABX - \triangle ABC = \frac{2h}{k} - 1$$

題意を満たすとき　$2 \leqq \dfrac{2h}{k} - 1 \leqq 3$　$\therefore \dfrac{3}{2}k \leqq h \leqq 2k$

Xが動く範囲は、右図の網掛け部である。

$BC = CR, AC = CQ, AB \parallel RQ$であり、面積は　$1 - 1 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$

同様に考えると、Xが動くすべての範囲は右図のようになる。
$UB = BC = CR, QC = CA = AT, SA = AB = BP$であり、
$TS \parallel BC \parallel PQ, PU \parallel CA \parallel RS, RQ \parallel AB \parallel TU$である。



面積は　$3 \cdot \left(\dfrac{7}{4} + \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{15}{2}$ ……(答)