2020年東大理$\boxed{5}$

(1)

$P(X,Y,0)$とする。$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}X-1\\Y\\-2\end{pmatrix}$で、線分$AP$上の点$Q$は

$$\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}X-1\\Y\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t(X-1)\\tY\\2(1-t)\end{pmatrix}\ (0\leqq t\leqq 1)$$

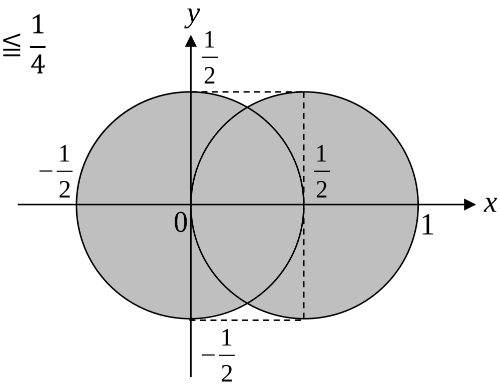
と表される。Pのz座標が1になるのは$t=\dfrac{1}{2}$のときで、このときのQのx座標、y座標は

$$x=\frac{1}{2}(X+1),y=\frac{1}{2}Y\quad X=2x-1,Y=2y$$

$X^2+Y^2\leqq 1$に代入すると　$(2x-1)^2+4y^2\leqq 1$　$\therefore\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2\leqq\dfrac{1}{4}$

$z=1$によるTの切り口は$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2\leqq\dfrac{1}{4}$と表され、

$z=1$によるSの切り口は$x^2+y^2\leqq\dfrac{1}{4}$であるから、図示すると右図の通り。



(2)

Pが$z=k(0\leqq k<2)$におけるSの切り口内を動くとする。このとき、Pは半径$\dfrac{2-k}{2}$の円内を動く。

$P(X,Y,k)$とすると、$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}X-1\\Y\\k-2\end{pmatrix}$である。線分$AP$上の点$Q$は

$$\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}X-1\\Y\\k-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t(X-1)\\tY\\2+t(k-2)\end{pmatrix}\ (0\leqq t\leqq 1)$$

と表される。Pのz座標が$u(k\leqq u<2)$となるとき　$u-2=t(k-2)$　$t=\dfrac{2-u}{2-k}$

このときのQのx座標、y座標は

$$x=1+\frac{2-u}{2-k}(X-1),y=\frac{2-u}{2-k}Y\quad\therefore X=\frac{2-k}{2-u}(x-1)+1=\frac{2-k}{2-u}\left(x-\frac{u-k}{2-k}\right),Y=\frac{2-k}{2-u}y$$

$X^2+Y^2\leqq\dfrac{(2-k)^2}{4}$に代入すると　$\left(x-\dfrac{u-k}{2-k}\right)^2+y^2\leqq\dfrac{(2-k)^2}{4}\cdot\left(\dfrac{2-u}{2-k}\right)^2=\dfrac{(2-u)^2}{4}$

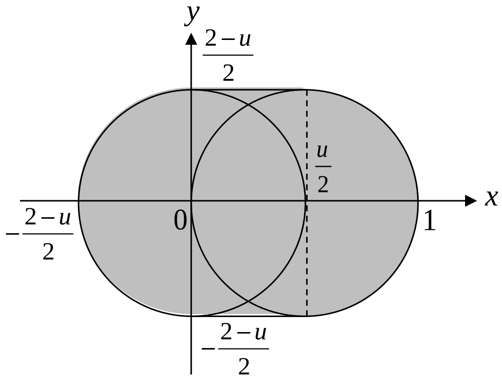
APが通過する範囲の$z=u(\geqq k)$における切り口は、中心$\left(\dfrac{u-k}{2-k},0\right)$、半径$\dfrac{2-u}{2}$の円である。

この半径はkに依存せず、$0\leqq k\leqq u$のとき$0\leqq\dfrac{u-k}{2-k}\leqq\dfrac{u}{2}$である。

このことを考慮し、PがS全体を動くときを考える。
PがS全体を動くとき、APが通過する範囲の$z=u(0 \leqq u \leqq 2)$における切り口は、xy平面において、

半径$\dfrac{2-u}{2}$の円の中心が、$(0,0)$から$\left(\dfrac{u}{2},0\right)$まで動いたときに通過する範囲の面積に等しい。

図示すると右図のようになり、面積は



$$S(u)=\pi\frac{(2-u)^2}{4}+(2-u)\cdot\frac{u}{2}=\frac{\pi-2}{4}u^2-(\pi-1)u+\pi$$

求める体積は

$$\begin{aligned}\int_0^2 S(u)du &= \frac{\pi-2}{4}\int_0^2 u^2du-(\pi-1)\int_0^2 udu+\pi\int_0^2 du\\ &=\frac{\pi-2}{4}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^2-(\pi-1)\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2+\pi[u]_0^2\\ &=\frac{\pi-2}{4}\cdot\frac{8}{3}-2(\pi-1)+2\pi=\frac{2\pi+2}{3}\ \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$