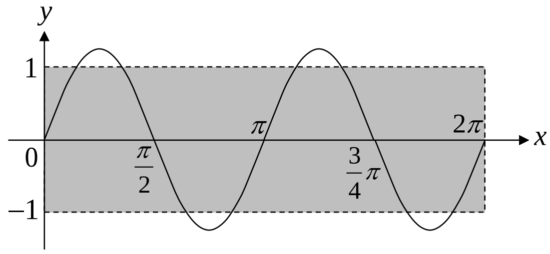
2020年東大理$\boxed{6}$

(1)



右図の網掛け部分$(0 \leqq x < 2\pi, -1 \leqq y \leqq 1)$を、$x$が単調増加するように、$x=0$から$x=2\pi$まで辿るとする。
どのように辿っても、少なくとも3回、$y=A\sin 2\theta$と交差する。$y=f(x)$と$y=A\sin 2\theta$の共有点が3個であるためには、$f(0)\neq f(2\pi)$である必要がある。
ところが、$y=\sin(x+\alpha)$は周期2πの周期関数であるから、$f(0)=f(2\pi)$である。
$y=A\sin 2\theta$と$y=\sin(x+\alpha)$は4つの共有点を持つから、題意は示された。

(2)

C上の任意の点$Q\left(\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta\right)$における接線は、$\dfrac{\sqrt{2}x\cos\theta}{2}+y\sin\theta=1$となる。

この接線と垂直な直線は、$x\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}y\cos\theta}{2}=k$と表される。これが$Q$を通るとき

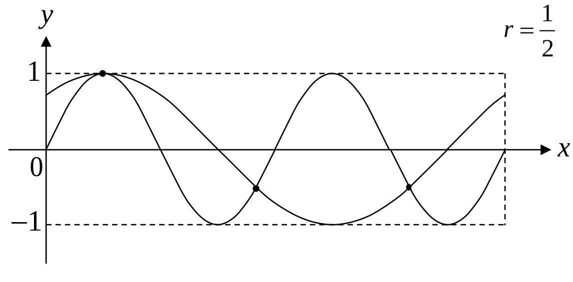
$$k=\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta-\frac{\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 2\theta$$

D内の任意の点Pを、$\left(\dfrac{r}{\sqrt{2}}\cos\alpha, r\sin\alpha\right)$とする。$P$が$x\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}y\cos\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sin 2\theta$を通るとき

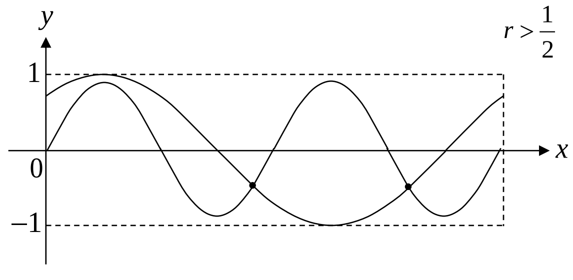
$$\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 2\theta=\frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}r\cos\theta\sin\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}r(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}r\sin(\theta-\alpha)$$

$$\therefore \frac{1}{2r}\sin 2\theta=\sin(\theta-\alpha) \text{ ——①}$$

(1)より、$\dfrac{1}{2r}>1$、$r<\dfrac{1}{2}$であれば、任意のαについて、①を満たすθが$0\leqq\theta<2\pi$の範囲に4つ存在する。



$\dfrac{1}{2r}\leqq 1$、$r\geqq\dfrac{1}{2}$のとき、右図のように、$y=\dfrac{1}{2r}\sin 2\theta$と$y=\sin(\theta-\alpha)$が同じ$x$で共に極大になるようにすると、①を満たす$\theta$が$0\leqq\theta<2\pi$の範囲に3つ以下になる。



以上により、題意を満たすrが存在し、その最大値は

$$\therefore r=\frac{1}{2} \cdots\cdots (答)$$