2021 年東大理 $\boxed{5}$

(1)

$f(\theta) = (\theta + \sin\theta + \alpha)^2 + (\cos\theta + 3)^2 = (\theta + \alpha)^2 + 2(\theta + \alpha)\sin\theta + 6\cos\theta + 10$

$f'(\theta) = 2(\theta + \alpha) + 2\sin\theta + 2(\theta + \alpha)\cos\theta - 6\sin\theta = 2(\theta + \alpha) + 2(\theta + \alpha)\cos\theta - 4\sin\theta$

$f''(\theta) = 2 + 2\cos\theta - 2(\theta + \alpha)\sin\theta - 4\cos\theta = 2 - 2\cos\theta - 2(\theta + \alpha)\sin\theta$

$f'''(\theta) = 2\sin\theta - 2\sin\theta - 2(\theta + \alpha)\cos\theta = -2(\theta + \alpha)\cos\theta$

$\theta + \alpha > 0$ より、$f''(\theta)$の増減は右図の通りで、$\theta = \dfrac{\pi}{2}$で極小。

	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'''(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f''(\theta)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f''(0) = 0, f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 - \pi - 2\alpha < 0, f''(\pi) = 4 > 0$ であるから、

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$において、$f''(\theta) = 0$ となるθがただ 1 つ存在する。このθをβとする。

$0 < \theta < \beta$のとき$f''(\theta) < 0$、$\beta < \theta < \pi$のとき$f''(\theta) > 0$ である。
$f'(\theta)$の増減は右図の通りで、$\theta = \beta$で極小。
$f'(0) = 4\alpha > 0, f'(\pi) = 0$ より$f'(\beta) < 0$ であるから、
$0 < \theta < \beta$において、$f'(\theta) = 0$ となるθがただ 1 つ存在する。

	0	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$f''(\theta)$	0	$-$	0	$+$	
$f'(\theta)$		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって、$0 < \theta < \pi$の範囲に、$f'(\theta) = 0$ となるθがただ 1 つ存在することが示された。(証明終)

(2)

(1) において、$0 < \theta < \pi$の範囲で$f'(\theta) = 0$となるθを、γとする。
$0 < \theta < \gamma$のとき$f'(\theta) > 0$、$\gamma < \theta < \pi$のとき$f'(\theta) < 0$ である。
$f(\theta)$の増減は右図の通りで、$\theta = \gamma$で極大。

	0	$\cdots$	γ	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	0
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\gamma < \dfrac{\pi}{2}$が題意を満たす条件である。(1)より$\dfrac{\pi}{2} < \beta$であるから、 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$ であればよい。

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) - 4 = \pi - 4 + 2\alpha < 0 \quad 2\alpha < 4 - \pi \quad \therefore 0 < \alpha < 2 - \dfrac{\pi}{2}$ $\cdots\cdots$(答)