2021年東大理 $\boxed{6}$

(1)

$$x^4+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r)=x^4+(q+r-p^2)x^2+p(r-q)x+qr$$

$p\neq 0$ より、係数を比較すると　$q+r-p^2=0$ ——① $r-q=\dfrac{b}{p}$ ——② $qr=c$ ——③

①、②より　$\therefore q=\dfrac{1}{2}\left(p^2-\dfrac{b}{p}\right), r=\dfrac{1}{2}\left(p^2+\dfrac{b}{p}\right)$ ……(答)

(2)

上記③に、(1)の結果を代入すると　$qr=\dfrac{1}{4}\left(p^4-\dfrac{b^2}{p^2}\right)=c$　$p^6-4cp^2-b^2=0$

$b=(a^2+1)(a+2), c=-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)$を代入すると　$p^6+(4a+3)(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2=0$

これは次のように因数分解できる。　$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\}=0$ ——④

求める整式$f(t), g(t)$の組の1つは　$\therefore f(t)=t^2+1, g(t)=(t^2+1)(t+2)^2$ ……(答)

(3)

$x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)$が有理数を係数とする2次式の積に因数分解できるとする。

$s\neq 0$ として、$x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)=(sx^2+tx+u)\left(\dfrac{1}{s}x^2+vx+w\right)$と書けるが、

$\left(x^2+\dfrac{t}{s}x+\dfrac{u}{s}\right)(x^2+svx+sw)$となるから、$x^2$の係数は1とする。展開すると$x^3$の係数は0であるから、

改めて、$x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$ ——⑤　とおく。

$p=0$ とする。⑤の左辺のxの係数が0になるから、$(a^2+1)(a+2)=0$ より$a=-2$ である。

このとき、⑤より$x^4+\dfrac{25}{4}=(x^2+q)(x^2+r)=x^4+(q+r)x^2+qr$であるから

$$q+r=0 \quad r=-q \quad x^4+\frac{25}{4}=x^4-q^2 \quad \therefore q^2=-\frac{25}{4}$$

qは実数であるから、不適。したがって、$p\neq 0$ でなければならない。

(1)および(2)により、0ではない実数pが④を満たすとき、

$$x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)=\left\{x^2+px+\frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right)\right\}\left\{x^2-px+\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right)\right\}$$

と因数分解できる。ここで、$b=(a^2+1)(a+2)$である。④を満たす実数pを考える。

$p^4>0, (a^2+1)p^2>0, (a^2+1)(a+2)^2>0$ より、$p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2>0$ である。

④を満たす実数pは、$p^2=a^2+1$ を満たす。$p^2=a^2+1$ を満たす有理数pが存在することが条件である。

pが有理数であるとき、k, lを互いに素な整数として、$p = \dfrac{l}{k}$とおける。

$p^2 = a^2 + 1$ に代入すると　$\dfrac{l^2}{k^2} = a^2 + 1$　$l^2 = (a^2 + 1)k^2$　$a^2 + 1$ はl^2の倍数でなければならない。

$a^2 + 1 = ml^2$とおくと　$l^2 = mk^2l^2$　$1 = mk^2$　kは整数であり、$k^2 = 1$ であるから、pは整数である。

p, aは整数であるから　$p^2 - a^2 = (p + a)(p - a) = 1$　$p + a = p - a = \pm 1$　$\therefore (p, a) = (\pm 1, 0)$
以上により、求めるaは　$\therefore a = 0$　……(答)

なお、このとき$x^4 + 2x - \dfrac{3}{4} = \left(x^2 + x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x^2 - x + \dfrac{3}{2}\right)$となる。

※一般に、p^2が整数かつpが有理数ならば、pは整数であるが、念のため論証しておいた。