2021年東大理$\boxed{4}$文$\boxed{4}$共通

(1)

K,Lは正の奇数かつ4で割った余りが等しいから、$K=4k\pm 1, L=4l\pm 1$とおく。

$A=4a+q, B=4b+r$とする。q,rは非負整数で$0\leqq q\leqq 3, 0\leqq r\leqq 3$である。

$K=4k+1, L=4l+1$のとき　$KA=4(4ka+kq+a)+q$　$LB=4(4lb+lr+b)+r$

$K=4k-1, L=4l-1$のとき　$KA=4(4ka+kq-a)-q$　$LB=4(4lb+lr-b)-r$

いずれにしても、$KA=LB$であれば、$q=r$であるから、題意は示された。(証明終)

(2)

$${}_{4a+1}C_{4b+1}$$
$$=\frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{4a}{4b}\cdot\frac{4a-1}{4b-1}\cdot\frac{4a-2}{4b-2}\cdot\frac{4a-3}{4b-3}\cdot\frac{4a-4}{4b-4}\cdot\cdots\cdot\frac{4a-4b+4}{4}\cdot\frac{4a-4b+3}{3}\cdot\frac{4a-4b+2}{2}\cdot\frac{4a-4b+1}{1}$$
$$=\frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{4a-1}{4b-1}\cdot\frac{2a-1}{2b-1}\cdot\frac{4a-3}{4b-3}\cdot\frac{a-1}{b-1}\cdot\cdots\cdot\frac{a-b+1}{1}\cdot\frac{4a-4b+3}{3}\cdot\frac{2a-2b+1}{1}\cdot\frac{4a-4b+1}{1}$$

ここで、kを自然数として、$q_k=(4k-1)(2k-1)(4k-3)$とおくと、q_kは常に奇数である。

$${}_{4a+1}C_{4b+1}=\frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{q_a}{q_b}\cdot\frac{a-1}{b-1}\cdot\frac{q_{a-1}}{q_{b-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{a-b+2}{2}\cdot\frac{q_{a-b+2}}{q_2}\cdot\frac{a-b+1}{1}\cdot\frac{q_{a-b+1}}{q_1}$$
$$=\frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{q_a}{q_b}\cdot\frac{q_{a-1}}{q_{b-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{q_{a-b+2}}{q_2}\cdot\frac{q_{a-b+1}}{q_1}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a-1}{b-1}\cdot\cdots\cdot\frac{a-b+2}{2}\cdot\frac{a-b+1}{1}$$
$$=\frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{q_a}{q_b}\cdot\frac{q_{a-1}}{q_{b-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{q_{a-b+2}}{q_2}\cdot\frac{q_{a-b+1}}{q_1}\cdot{}_aC_b$$

$$\therefore (4b+1)\cdot q_b\cdot q_{b-1}\cdot\cdots\cdot q_2\cdot q_1\cdot{}_{4a+1}C_{4b+1}=(4a+1)\cdot q_a\cdot q_{a-1}\cdot\cdots\cdot q_{a-b+2}\cdot q_{a-b+1}\cdot{}_aC_b$$

したがって、題意を満たす正の奇数K,Lとして、

$K=(4b+1)\cdot q_b\cdot q_{b-1}\cdot\cdots\cdot q_2\cdot q_1, L=(4a+1)\cdot q_a\cdot q_{a-1}\cdot\cdots\cdot q_{a-b+2}\cdot q_{a-b+1}$

が存在する。以上により示された。(証明終)

(3)

$$q_k=(16k^2-16k+3)(2k-1)=16k(k-1)(2k-1)+6k-3=4\{4k(k-1)(2k-1)+1\}+2k-3$$

kが奇数のとき　$k=2l-1$とすると　$2k-3=4l-5=4(l-1)-1$　q_kを4で割った余りは3。

kが偶数のとき　$k=2l$とすると　$2k-3=4l-3=4(l-1)+1$　q_kを4で割った余りは1。

$a-b$が2で割り切れることから、aとbの奇偶は一致する。(2)で定めたK,Lについて考える。

a,bがともに奇数であるとき

K,Lを4で割った余りは、ともに $1\cdot\underbrace{3\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot\cdots\cdot 3}_{b\text{個の積}}=3^{\frac{b+1}{2}}$ を4で割った余りに一致する。

a,bがともに偶数であるとき

K,Lを4で割った余りは、ともに $1\cdot\underbrace{1\cdot 3\cdot 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot 3}_{b\text{個の積}}=3^{\frac{b}{2}}$ を4で割った余りに一致する。

いずれにしても、K,Lを4で割った余りは一致する。

したがって、(1)より、${}_{4a+1}C_{4b+1}$を4で割った余りと、${}_aC_b$を4で割った余りは一致する。(証明終)

(4)

$2021 = 4 \cdot 505 + 1, 37 = 4 \cdot 9 + 1$であり、505と9の奇偶は一致する。

(3)より、${}_{2021}C_{37}$を4で割った余りと、${}_{505}C_9$を4で割った余りは一致する。

$505 = 4 \cdot 126 + 1, 9 = 4 \cdot 2 + 1$であり、126と2の奇偶は一致する。

(3)より、${}_{505}C_9$を4で割った余りと、${}_{126}C_2$を4で割った余りは一致する。

${}_{126}C_2 = 63 \cdot 125 = 7875 = 4 \cdot 1968 + 3$であるから、${}_{2021}C_{37}$を4で割った余りは3 ……(答)