2022年東大文$\boxed{2}$

(1)

$P(\alpha,\alpha^3-\alpha)$における$C$の接線の傾きは$3\alpha^2-1$である。$3\alpha^2-1=0$とすると$l$は$y$軸に平行になるが、このとき$C$と$l$は相違なる3点で交わらないから、不適。

したがって $3\alpha^2-1\neq 0$ であり、lの方程式は　$y=\dfrac{1}{1-3\alpha^2}(x-\alpha)+\alpha^3-\alpha$

$x^3-x=\dfrac{1}{1-3\alpha^2}(x-\alpha)+\alpha^3-\alpha$とすると　$(x^3-\alpha^3)-(x-\alpha)+\dfrac{1}{3\alpha^2-1}(x-\alpha)=0$

$(x-\alpha)\left\{(x^2+\alpha x+\alpha^2)-1+\dfrac{1}{3\alpha^2-1}\right\}=0$　$x^2+\alpha x+\alpha^2-1+\dfrac{1}{3\alpha^2-1}=0$――① とする。

二次方程式①が、相違なる2実数解を持ち、なおかつ$x=\alpha$を解に持たないことが条件である。

$$D=\alpha^2-4\left(\alpha^2-1+\frac{1}{3\alpha^2-1}\right)=\frac{-(3\alpha^2-4)(3\alpha^2-1)-4}{3\alpha^2-1}=-\frac{9\alpha^4-15\alpha^2+8}{3\alpha^2-1}>0$$

$9\alpha^4-15\alpha^2+8=9\left(\alpha^2-\dfrac{5}{6}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ であるから、$D>0$ となるには　$3\alpha^2-1<0$　$\therefore -\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\alpha<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

①に$x=\alpha$を代入すると、$3\alpha^2-1+\dfrac{1}{3\alpha^2-1}=\dfrac{(3\alpha^2-1)^2+1}{3\alpha^2-1}=0$ は成り立たない。

以上により、αのとりうる範囲は　$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\alpha<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ……(答)

(2)

β,γは二次方程式①の2実数解である。解と係数の関係より　$\beta+\gamma=-\alpha,\beta\gamma=\alpha^2-1+\dfrac{1}{3\alpha^2-1}$

$$\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1=(\beta+\gamma)^2-\beta\gamma-1=\alpha^2-\left(\alpha^2-1+\frac{1}{3\alpha^2-1}\right)-1=-\frac{1}{3\alpha^2-1}\neq 0$$　(証明終)

(3)

$u=4\alpha^3-(3\alpha^2-1)=4\alpha^3-3\alpha^2+1$　$u=f(\alpha)$とすると　$f'(\alpha)=12\alpha^2-6\alpha=6\alpha(2\alpha-1)$

$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\alpha<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$における$f(\alpha)$の増減は右の通り。

α	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(\alpha)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\pm\dfrac{4}{3\sqrt{3}}=\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　$f(0)=1$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}+1=\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}<\dfrac{8}{9}<1$ より、uのとりうる範囲は　$\therefore -\dfrac{4\sqrt{3}}{9}<u\leqq 1$ ……(答)