2022年東大文$\boxed{3}$

数列$\{b_n\}$を、a_nを3で割った余りとして定義する。
b_{n+1}は、${b_n}^2+n(n+2)$を3で割った余りに等しい。$a_1=4$より$b_1=1$。

${b_1}^2+1\cdot3=4\quad\therefore b_2=1\quad {b_2}^2+2\cdot4=9\quad\therefore b_3=0\quad {b_3}^2+3\cdot5=15\quad\therefore b_4=0$

${b_4}^2+4\cdot6=24\quad\therefore b_5=0\quad {b_5}^2+5\cdot7=35\quad\therefore b_6=2\quad {b_6}^2+6\cdot8=52\quad\therefore b_7=1$

${b_7}^2+7\cdot9=64\quad\therefore b_8=1\quad {b_8}^2+8\cdot10=81\quad\therefore b_9=0\quad {b_9}^2+9\cdot11=99\quad\therefore b_{10}=0$

${b_{10}}^2+10\cdot12=120\quad\therefore b_{11}=0\quad {b_{11}}^2+11\cdot13=143\quad\therefore b_{12}=2$

mを自然数として、$b_{6m-5}=b_{6m-4}=1,\ b_{6m-3}=b_{6m-2}=b_{6m-1}=0,\ b_{6m}=2$と予想できるので、これを示す。
$m=1,2$のとき成立。$b_{6k-5}=1$とする。

${b_{6k-5}}^2+(6k-5)(6k-3)=\left(3\text{の倍数}\right)+1\quad\therefore b_{6k-4}=1$

${b_{6k-4}}^2+(6k-4)(6k-2)=\left(3\text{の倍数}\right)+9=\left(3\text{の倍数}\right)\quad\therefore b_{6k-3}=0$

${b_{6k-3}}^2+(6k-3)(6k-1)=\left(3\text{の倍数}\right)\quad\therefore b_{6k-2}=0$

${b_{6k-2}}^2+(6k-2)6k=\left(3\text{の倍数}\right)\quad\therefore b_{6k-1}=0$

${b_{6k-1}}^2+(6k-1)(6k+1)=\left(3\text{の倍数}\right)-1=\left(3\text{の倍数}\right)+2\quad\therefore b_{6k}=2$

${b_{6k}}^2+6k(6k+2)=\left(3\text{の倍数}\right)+4=\left(3\text{の倍数}\right)+1\quad\therefore b_{6k+1}=1$

したがって、$m=k+1$においても成立。

(1)

$2022=6\cdot337$であり、$b_{2022}=2$であるから、a_{2022}を3で割った余りは2 ……(答)

(2)

$a_{2023}={a_{2022}}^2+2022\cdot2024={a_{2022}}^2+2^4\cdot3\cdot11\cdot23\cdot337$

$a_{2024}={a_{2023}}^2+2023\cdot2025={a_{2023}}^2+3^4\cdot5^2\cdot7\cdot17^2$

a_{2023}とa_{2022}の公約数は、$2^4\cdot3\cdot11\cdot23\cdot337$の約数である。
a_{2024}とa_{2023}の公約数は、$3^4\cdot5^2\cdot7\cdot17^2$の約数である。
これより、$a_{2022},a_{2023},a_{2024}$の公約数の候補になるのは3か1のみであるが、(1)よりa_{2022}は3を約数に持たない。
したがって、求める$a_{2022},a_{2023},a_{2024}$の最大公約数は1 ……(答)

※a_{n+1}とa_nの公約数は$n(n+2)$の約数であるが、$n(n+2)$の約数はa_{n+1}とa_nの公約数とは限らない。