2022 年東大理 $\boxed{2}$

(1)

$a_1 = 1 \quad a_2 = {a_1}^2 + 1 = 2 \quad a_3 = {a_2}^2 + 1 = 5$

$n = 3$において成立。$a_{3k} = 5m$とすると

$a_{3k+1} = {a_{3k}}^2 + 1 = 25m^2 + 1 \quad a_{3k+2} = {a_{3k+1}}^2 + 1 = (5\text{ の倍数}) + 1 + 1 = (5\text{ の倍数}) + 2$

$a_{3k+3} = {a_{3k+2}}^2 + 1 = (5\text{ の倍数}) + 4 + 1 = (5\text{ の倍数}) + 5 = (5\text{ の倍数})$

したがって、$n = 3k + 3$でも成立。以上により示された。(証明終)

(2)

数列$\{a_n\}$は単調増加である。$a_{k+1} = {a_k}^2 + 1 = {a_k}^2 + a_1$より

$a_{k+2} = ({a_k}^2 + a_1)^2 + 1 = (a_k\text{の倍数}) + {a_1}^2 + 1 = (a_k\text{の倍数}) + a_2$

$a_{k+3} = (a_k\text{の倍数}) + {a_2}^2 + 1 = (a_k\text{の倍数}) + a_3$

順次計算していくと

$a_{k+(k-1)} = (a_k\text{の倍数}) + {a_{k-2}}^2 + 1 = (a_k\text{の倍数}) + a_{k-1}$

$a_{k+k} = (a_k\text{の倍数}) + {a_{k-1}}^2 + 1 = (a_k\text{の倍数}) + a_k = (a_k\text{の倍数})$

これより、a_{2k}はa_kの倍数であることがわかる。$1 \leqq l \leqq k - 1$のとき、a_{k+l}はa_kの倍数ではない。

以下帰納的に、$a_{3k}, a_{4k}, a_{5k}, \cdots$は$a_k$の倍数であることがわかるから、$a_n$が$a_k$の倍数となるための必要十分条件は、$n$が$k$の倍数であることである。……(答)

(3)

(2) より、a_{8088}はa_{2022}の倍数である。

$a_{8089} = {a_{8088}}^2 + 1 \quad a_{8090} = {a_{8089}}^2 + 1 = (a_{2022}\text{の倍数}) + 1 + 1 = (a_{2022}\text{の倍数}) + 2$

$a_{8091} = {a_{8090}}^2 + 1 = (a_{2022}\text{の倍数}) + 4 + 1 = (a_{2022}\text{の倍数}) + 5$

以上により、${a_{8091}}^2 = (a_{2022}\text{の倍数}) + 5^2$と表せる。$a_{2022}$と${a_{8091}}^2$の公約数は、$5^2$の約数である。

$8091 = 3 \times 2697, 2022 = 3 \times 674$であるから、(1) より、$a_{2022}$と$a_{8091}$はともに$5$の倍数である。

${a_{8091}}^2$は5^2の倍数であるが、a_{2022}が5^2の倍数であるか調べる。

a_{2022}が5^2の倍数である条件は、ある2022の約数kにおいて、$a_k = 5^2$となることである。

$2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$であり、$a_2 = 2,\ a_3 = 5$。$337$は$3$の倍数ではないから、$a_{337}$は$5$の倍数ではない。

したがって、a_{2022}は5の倍数であるが、5^2の倍数ではない。

求めるa_{2022}と${a_{8091}}^2$の最大公約数は5 ……(答)