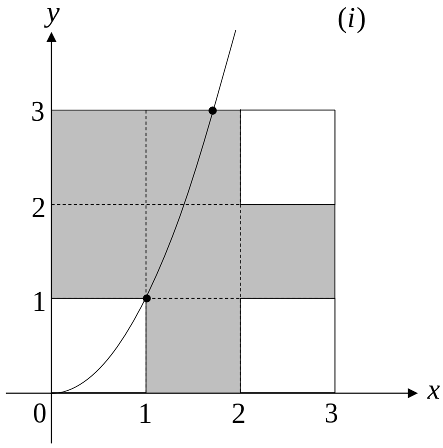
2022年東大理$\boxed{3}$

(1)



領域D内かつ3点O, A, Bのいずれからも十分離れている点の存在範囲は、右図(i)の通り。境界線を含む。放物線$y = x^2$を重ねてみると、

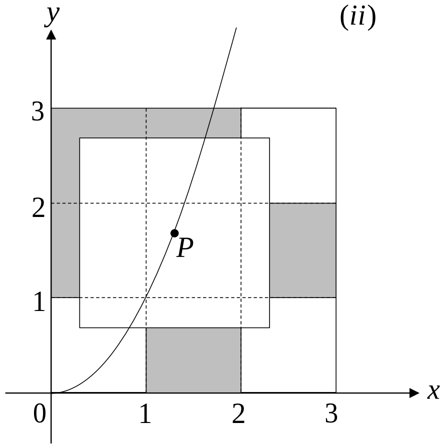
aのとりうる値の範囲は　$1 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ ……(答)

(2)

$P(a, a^2)$ から十分に離れていない範囲は、

$$a - 1 < x < a + 1, a^2 - 1 < y < a^2 + 1$$

と表せる。



$a^2 + 1 \leqq 3$　$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$のとき

点Qの存在範囲は、右図(ii)のように複数領域に分かれる。

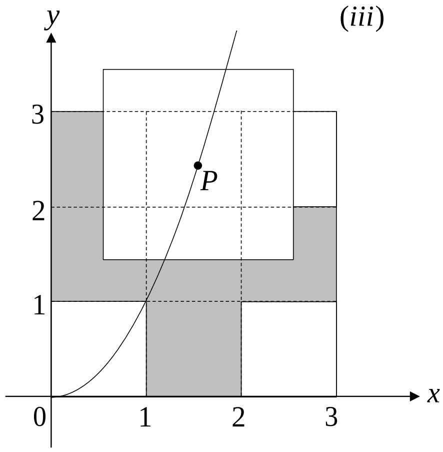
L字型部分の面積は

$$4 - (a^2 + 1 - 1)\big(2 - (a - 1)\big) = 4 - a^2(3 - a) = a^3 - 3a^2 + 4$$

右端の長方形の面積は　$\big(3 - (a + 1)\big) \cdot 1 = 2 - a$

下端の長方形の面積は　$1 \cdot (a^2 - 1) = a^2 - 1$

$$f(a) = a^3 - 3a^2 + 4 + 2 - a + a^2 - 1 = a^3 - 2a^2 - a + 5$$



$a^2 + 1 \geqq 3$　$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$のとき

点Qの存在範囲は、右図(iii)の通り。

$0 \leqq y \leqq 1$の範囲の面積は　1

$1 \leqq y \leqq 2$の範囲の面積は　$3 - 2 \cdot \big(2 - (a^2 - 1)\big) = 2a^2 - 3$

$2 \leqq y \leqq 3$の範囲の面積は　$1 \cdot (a - 1) = a - 1$

$$f(a) = 1 + 2a^2 - 3 + a - 1 = 2a^2 + a - 3$$

$$f(a) = \begin{cases} a^3 - 2a^2 - a + 5 & 1 \leqq a \leqq \sqrt{2}\text{のとき} \\ 2a^2 + a - 3 & \sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}\text{のとき} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)

$f(a)$は$1 \leqq a \leqq \sqrt{3}$で連続である。

$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$のとき　$f'(a) = 3a^2 - 4a - 1 = 3\left(a - \dfrac{2 - \sqrt{7}}{3}\right)\left(a - \dfrac{2 + \sqrt{7}}{3}\right)$

$\dfrac{2 + \sqrt{7}}{3} - \sqrt{2} > \dfrac{2 + 2.6}{3} - 1.5 = \dfrac{4.6 - 4.5}{3} > 0$ より$\sqrt{2} < \dfrac{2 + \sqrt{7}}{3}$であり、$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$において$f'(a) < 0$

となり、単調減少。

$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$のとき　$f'(a) = 4a + 1$　$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$において$f'(a) > 0$ となり、単調増加。

$f(a)$を最小にするaは　$\therefore a = \sqrt{2}$ ……(答)