2022 年東大理 $\boxed{4}$

(1)

任意の点$P(a,b)$を通る直線$y=m(x-a)+b$と、Cとの相違なる交点の個数を考える。

交点の個数は、$f(x)=x^3-x-m(x-a)-b=x^3-(m+1)x+ma-b$として、$f(x)=0$ の相違なる実数解の個数に等しい。

$f'(x)=3x^2-(m+1)$より、$m+1\leqq 0$ であれば

$f'(x)\geqq 0$ であり、$f(x)$は単調増加である。

以下、$m+1>0$、$m>-1$ の範囲で考える。

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(x)$の増減は右の通り。

$f(x)=0$ が 3 つの相違なる実数解を持つ条件は　$f\left(-\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}\right)\cdot f\left(\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}\right)<0$ ――①

$f(x)=x\left(x^2-\dfrac{m+1}{3}\right)-\dfrac{2}{3}(m+1)x+ma-b$より

$$f\left(-\sqrt{\frac{m+1}{3}}\right)=2\left(\frac{m+1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+ma-b\quad f\left(\sqrt{\frac{m+1}{3}}\right)=-2\left(\frac{m+1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+ma-b$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{m+1}{3}}\right)\cdot f\left(\sqrt{\frac{m+1}{3}}\right)=(ma-b)^2-4\left(\frac{m+1}{3}\right)^3=(m+1)^3\left\{\frac{(ma-b)^2}{(m+1)^3}-\frac{4}{27}\right\}$$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{(ma-b)^2}{(m+1)^3}=\lim_{m\to\infty}\frac{\left(a-\frac{b}{m}\right)^2}{m\left(1+\frac{1}{m}\right)^3}=0$ であるから、mを十分大きくすれば、任意の点$P(a,b)$について①が成立し、題意を満たす直線lが存在する。以上により示された。(証明終)

(2)

lとCが 3 つの相違なる交点を持ち、それらのx座標が$\alpha,\beta,\gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$であるとする。

lとCで囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなる条件は、$\displaystyle\int_\alpha^\gamma(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx=0$ である。

$$\int_\alpha^\gamma(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx=\int_\alpha^\gamma(x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)(x-\alpha+\alpha-\gamma)dx$$

$$=\int_\alpha^\gamma\{(x-\alpha)^3+(2\alpha-\beta-\gamma)(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(x-\alpha)\}dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}+(2\alpha-\beta-\gamma)\frac{(x-\alpha)^3}{3}+(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\gamma$$

$$=\frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^3\{3(\gamma-\alpha)+4(2\alpha-\beta-\gamma)+6(\beta-\alpha)\}=\frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^3(2\beta-\alpha-\gamma)=0$$

$\gamma-\alpha\neq 0$ であるから　$2\beta-\alpha-\gamma=0\ \therefore\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$

2 点$(\alpha,\alpha^3-\alpha),(\gamma,\gamma^3-\gamma)$の中点が$C$上にあるから

$\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\right)^3-\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\dfrac{\alpha^3-\alpha+\gamma^3-\gamma}{2}\quad(\alpha+\gamma)^3=4(\alpha^3+\gamma^3)=4\{(\alpha+\gamma)^3-3\alpha\gamma(\alpha+\gamma)\}$

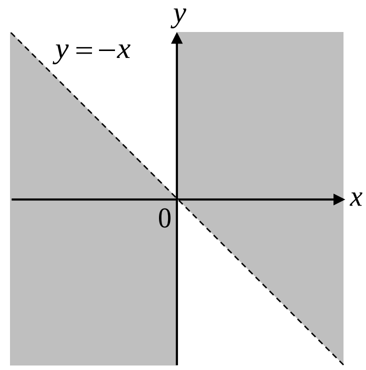
$3(\alpha+\gamma)^3-12\alpha\gamma(\alpha+\gamma)=0\quad(\alpha+\gamma)\{(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\gamma\}=0\quad\therefore(\alpha+\gamma)(\gamma-\alpha)^2=0$

したがって、$\alpha+\gamma=0$ より$\beta=0$ であり、題意を満たす直線lは原点を通ることが示された。

lの式を$y=mx$とし、$x^3-x=mx$とすると　$x^3-(m+1)x=x\{x^2-(m+1)\}=0$

$x^2-(m+1)=0$ が$x=0$ 以外の相違なる 2 実数解を持つから　$m+1>0\quad\therefore m>-1$

以上により、座標平面上でlが通過する範囲は右の通りで、
これが点Pの存在範囲である。境界線は原点のみ含み、
他は含まない。



※(2)の計算は、$\alpha+\beta+\gamma=0$に気づけば楽。