2022年東大理$\boxed{6}$

$\vec{a}=(1,0),\vec{b}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\vec{c}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$とする。$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$より、コインを$N$回投げた後$X_N$が$O$にあるためには、$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$方向への移動回数が、同じでなければならない。すなわち、N回中表が出る回数が3の倍数でなければならない。

n回目に表が出たとき、$n-1$回目までに裏が出た回数を3で割った余りが、0であれば$\vec{a}$方向に移動し、1であれば$\vec{b}$方向に移動し、2であれば$\vec{c}$方向に移動する。

(1)

表が出る回数は、0回、3回、6回のいずれかである。

表が出る回数が0回である場合は1通り。

表が出る回数が3回である場合

i)裏が 0 回出た後か、3 回出た後　ii)裏が 1 回出た後か、4 回出た後　iii)裏が 2 回出た後か、5 回出た後

i)〜iii)のそれぞれについて、1 つずつ表が出ることが条件である。

このような場合は$2^3=8$通り。

表が出る回数が6回である場合、裏が2回しか出ないため、表・表・裏・表・表・裏・表・表という1通り。

以上により、X_8がOにあるのは$1+8+1=10$通り。

すべての裏表の出方は$2^8=256$通りであるから、求める確率は　$\frac{10}{256}=\frac{5}{128}\cdots\cdots$(答)

(2)

rが3の倍数でなければ、$p_r=0$である。

$r=3m(0\leqq m\leqq 66)$のとき、裏が出る回数は$200-3m$である。

$i)$ 裏が0回、3 回、6 回、…、$198-3m$回出た後

$ii)$ 裏が1回、4 回、7 回、…、$199-3m$回出た後

$iii)$ 裏が2回、5 回、8 回、…、$200-3m$回出た後

i)〜iii)のそれぞれについて、m回ずつ表が出ることが条件である。

それぞれ、「裏」が横一列に$66-m$個並んでいて、いずれかの「裏」の後にm個の「表」を置くと考える。「表」が重複して置かれる場合もありうる。このような「表」の置き方は、$(66-m)+m=66$箇所のうちいずれかm箇所に「表」を置く置き方の総数に等しく、${}_{66}C_m$通り。

i)〜iii)のそれぞれについて、m回ずつ表が出る場合は、$({}_{66}C_m)^3$通り。

すべての裏表の出方は2^{200}通りであるから、

rが 3 の倍数でないとき$p_r=0$、$r=3m(0\leqq m\leqq 66)$のとき$p_r=\frac{({}_{66}C_m)^3}{2^{200}}\cdots\cdots$(答)

p_rが最大になるとき、${}_{66}C_m$が最大である。$\frac{{}_{66}C_{m+1}}{{}_{66}C_m}=\frac{66-m}{m+1}<1$とすると

$66-m<m+1$　$2m>65$　$\therefore m\geqq 33$　$m\geqq 33$ のとき${}_{66}C_m>{}_{66}C_{m+1}$、$m\leqq 32$ のとき${}_{66}C_m<{}_{66}C_{m+1}$

${}_{66}C_0<{}_{66}C_1<\cdots<{}_{66}C_{32}<{}_{66}C_{33}>{}_{66}C_{34}>\cdots>{}_{66}C_{65}>{}_{66}C_{66}$であるから、

p_rを最大にするrは　$r=3\cdot 33=99$　……(答)