2023年東大文$\boxed{1}$

$$\frac{\alpha^3}{1-\beta}+\frac{\beta^3}{1-\alpha}=\frac{\alpha^3(1-\alpha)+\beta^3(1-\beta)}{(1-\beta)(1-\alpha)}=\frac{\alpha^3+\beta^3-(\alpha^4+\beta^4)}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

解と係数の関係より、$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-k$であるから

$1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta=1+1-k=2-k$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-1-3k$

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-2\alpha^2\beta^2=(1+2k)^2-2k^2=2k^2+4k+1$

$$\frac{\alpha^3}{1-\beta}+\frac{\beta^3}{1-\alpha}=\frac{-1-3k-2k^2-4k-1}{2-k}=\frac{2k^2+7k+2}{k-2}=2k+11+\frac{24}{k-2}=2(k-2)+\frac{24}{k-2}+15$$

相加平均・相乗平均の関係より　$2(k-2)+\dfrac{24}{k-2}\geqq 2\sqrt{2(k-2)\cdot\dfrac{24}{k-2}}=8\sqrt{3}$

等号成立は　$2(k-2)=\dfrac{24}{k-2}$　$(k-2)^2=12$　$k>2$ より、$k=2+2\sqrt{3}$のとき。

以上により、$\dfrac{\alpha^3}{1-\beta}+\dfrac{\beta^3}{1-\alpha}$の最小値は　$15+8\sqrt{3}$　……(答)