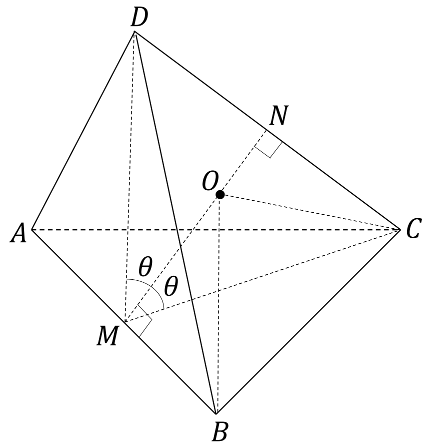
2023 年東大文 $\boxed{4}$

(1)



$AC=BC=x$とすると、余弦定理より

$$1=x^2+x^2-2x^2\cos\angle ACB=2x^2-\frac{8}{5}x^2=\frac{2}{5}x^2$$

$$x^2=\frac{5}{2} \quad \therefore x=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

ABの中点をMとすると、$CM\perp AB$である。三平方の定理より

$$CM^2=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4} \quad \therefore CM=\frac{3}{2}$$

三角形ABCの面積は $\frac{1}{2}AB\cdot CM=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$ ……(答)

(2)

三角形ABCを底面とし、$\angle CMD=2\theta$とする。

対称性より、球面の中心Oは三角形CMD内にある。CDの中点をNとすると、$CM=DM$であるから、

OはMN上にある。$MN=CM\cos\theta=\frac{3}{2}\cos\theta$、$CN=CM\sin\theta=\frac{3}{2}\sin\theta$ より

三角形OBMについて、$OB=1$ であるから $OM^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ $\therefore OM=\frac{\sqrt{3}}{2}$

三角形OCNについて、$OC=1$ であるから

$$1=\left(\frac{3}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\sin^2\theta=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta=3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta \quad \therefore \cos\theta=\frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot 2=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$\sin^2\theta=1-\frac{48}{81}=\frac{33}{81} \quad \therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{33}}{9}$$

四面体$ABCD$の高さは、$DM\sin 2\theta=3\sin\theta\cos\theta=3\cdot\frac{\sqrt{33}}{9}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{9}=\frac{4\sqrt{11}}{9}$ であるから

四面体$ABCD$の体積は $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4\sqrt{11}}{9}=\frac{\sqrt{11}}{9}$ ……(答)

※2001 年東大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通に類題あり。