2023 年東大理$\boxed{2}$文$\boxed{3}$共通

(1)

白玉 5 個、黒玉 3 個を横一列に並べる並べ方の総数は　$_8C_3=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=56$ 通り

横一列に並んだ 8 個の玉の間および両端のうち、いずれか 4 箇所に赤玉を置く置き方の総数は

$_9C_4=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=126$ 通り

どの赤玉も隣り合わない並べ方の総数は　$56\times 126=7056=2^4\cdot 3^2\cdot 7^2$ 通り

白玉 5 個、黒玉 3 個、赤玉 4 個を横一列に並べる並べ方の総数は

$\dfrac{12!}{5!\cdot 3!\cdot 4!}=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{6\cdot 24}=11\cdot 10\cdot 9\cdot 4\cdot 7=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11$ 通り

求める確率は　$p=\dfrac{2^4\cdot 3^2\cdot 7^2}{2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11}=\dfrac{2\cdot 7}{5\cdot 11}=\dfrac{14}{55}$ ……(答)

(2)

白玉 5 個、黒玉 3 個を横一列に並べるとき

(i) 黒玉が隣り合わない並べ方の総数は　$_6C_3=\dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20$ 通り

(ii) 黒玉 3 個が連続する並べ方の総数は　$_6C_1=6$ 通り

(iii) 黒玉 2 個が隣り合い、もう 1 個は隣り合わない並べ方の総数は　$56-20-6=30$ 通り

(i), (ii), (iii)のそれぞれについて、8 個の玉の間および両端のうち、いずれか 4 箇所に赤玉を置き、どの赤玉も隣り合わず、どの黒玉も隣り合わないようにする置き方を考える。

(i)の場合　赤玉は9箇所に任意に置けるので

○●○●○○●○　　$20\times {}_9C_4=20\times 126=2520$ 通り

↑↑↑↑↑↑↑↑↑

(ii)の場合　赤玉のうち2個は3個連続した黒玉の間に置き、残り2個は7箇所に任意に置けるので

○●●●○○○○　　$6\times {}_7C_2=6\times 21=126$ 通り

↑↑↑↑↑↑↑↑↑

(iii)の場合　赤玉のうち1個は隣り合う黒玉の間に置き、残り3個は8箇所に任意に置けるので

○○●●○○●○　　$30\times {}_8C_3=30\times 56=1680$ 通り

↑↑↑↑↑↑↑↑↑

どの赤玉も隣り合わず、どの黒玉も隣り合わない並べ方の総数は

$2520+126+1680=4326=2\cdot 3\cdot 7\cdot 103$ 通り

どの赤玉も隣り合わず、どの黒玉も隣り合わない確率は　$\dfrac{2\cdot 3\cdot 7\cdot 103}{2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11}=\dfrac{103}{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11}$

求める条件付き確率は　$q=\dfrac{103}{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11}\div\dfrac{14}{55}=\dfrac{103}{2^3\cdot 3\cdot 7}=\dfrac{103}{168}$ ……(答)