2023 年東大理 $\boxed{6}$

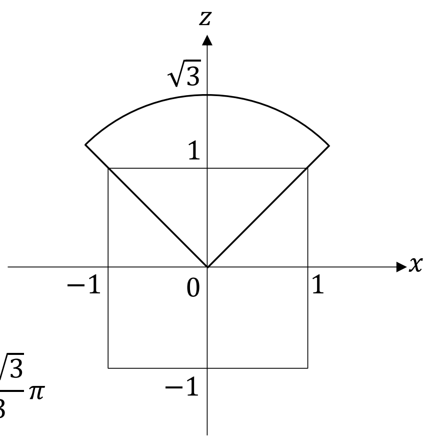
(1)

Oから立方体の各頂点までの距離は$\sqrt{3}$であるから、点Pは立方体の面および内部全体に到達できる。
Pが立方体の 1 つの面内を動くとき、線分OPが通過する範囲は、一辺が 2 の正方形を底面とし、高さ 1 の正四角錐になり、その体積は　$\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 1=\frac{4}{3}$

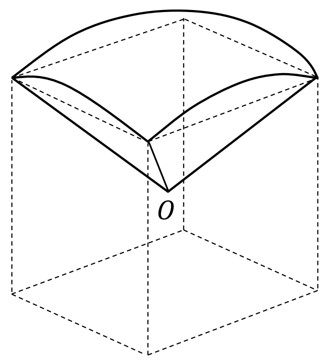
PがS上を動くとき、線分OPが通過する範囲の体積はこの 5 倍で、$\frac{20}{3}$。

Pが立方体の外部、z$\geqq 1$ の範囲を動くとき、
線分OPが通過する範囲は、半径$\sqrt{3}$の球の一部であるが、線分OPは立方体の上面の各辺と交差する位置より下には動けない。
線分OPが通過する範囲は、4 つの扇形の面と球面の一部に囲まれた立体である。この体積は半径$\sqrt{3}$の球の体積の$\frac{1}{6}$であり、$\frac{1}{6}\times\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

以上により、Vの体積は　$\frac{20}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　$\cdots\cdots$(答)



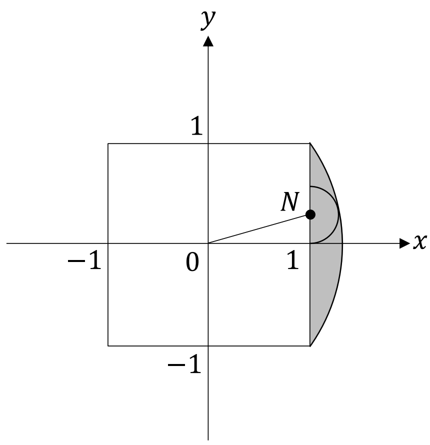
$y=0$における断面



(2)

$N=O$のとき、点Pが動きうる範囲はVと等しい。$N\neq O$のとき、点PがVの外部を動く場合を考える。
$ON\leqq\sqrt{3}$であり、点NはVの外部に動くことはできない。点Nを固定したとき、点Pが動きうる範囲は、点Nを中心とした半径NPの球の表面および内部になる。NPをなるべく大きくとれるように、点Nを立方体の上面の辺上に固定して考える。

$N(1,t,1)(-1\leqq t\leqq 1)$と固定して考える。
$ON=\sqrt{t^2+2}$であるから、$NP\leqq\sqrt{3}-\sqrt{t^2+2}$である。
点Pが動きうる範囲の、平面$z=1$における断面を考える。
点Pが動きうる範囲は、$(x-1)^2+(y-t)^2\leqq(\sqrt{3}-\sqrt{t^2+2})^2$で与えられる半円である。$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で半円が通過する領域は右図網掛部のようになり、これをTとする。



Tを平面$y=k$で切ったとき、切り取られる線分の長さを$R(k)$とする。
$\{R(k)\}^2$は、$(\sqrt{3}-\sqrt{t^2+2})^2-(k-t)^2=5-2\sqrt{3}\sqrt{t^2+2}+2kt-k^2$の最大値として与えられる。
対称性から、$0\leqq t\leqq 1, 0\leqq k\leqq 1$ として、$f(t)=5-2\sqrt{3}\sqrt{t^2+2}+2kt-k^2$を最大にする$t$を求める。

$$f'(t)=-\frac{2\sqrt{3}t}{\sqrt{t^2+2}}+2k=\frac{2\left(k\sqrt{t^2+2}-\sqrt{3}t\right)}{\sqrt{t^2+2}}=\frac{2\{k^2(t^2+2)-3t^2\}}{\sqrt{t^2+2}\left(k\sqrt{t^2+2}+\sqrt{3}t\right)}=\frac{2\{2k^2-(3-k^2)t^2\}}{\sqrt{t^2+2}\left(k\sqrt{t^2+2}+\sqrt{3}t\right)}$$

$f'(t)=0$ のとき　$t^2=\dfrac{2k^2}{3-k^2}=2\left(\dfrac{3}{3-k^2}-1\right)$

これは $0 \leqq k \leqq 1$ において単調増加であり、$0 \leqq t \leqq 1$ となる。

$f(t)$の増減は右の通りで、$\mathrm{t}=\dfrac{\sqrt{2}k}{\sqrt{3-k^2}}$ のとき最大になる。

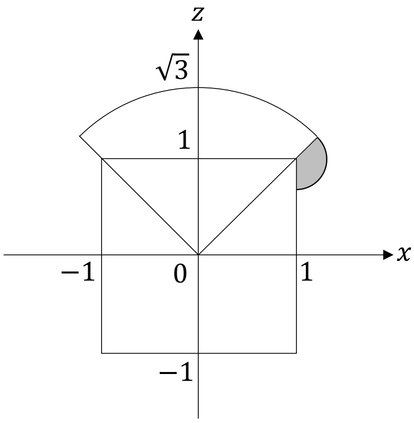
t	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}k}{\sqrt{3-k^2}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$\{R(k)\}^2=f\left(\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{3-k^2}}\right)=5-2\sqrt{3}\sqrt{\frac{2k^2}{3-k^2}+2}+\frac{2\sqrt{2}k^2}{\sqrt{3-k^2}}-k^2$$

$$=5-2\sqrt{3}\sqrt{\frac{6}{3-k^2}}+2\sqrt{2}\left(\frac{3}{\sqrt{3-k^2}}-\sqrt{3-k^2}\right)-k^2=5-\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3-k^2}}+\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3-k^2}}-2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}-k^2$$

$$=5-k^2-2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}$$

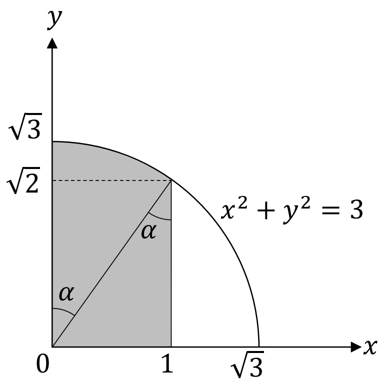
Pが動きうる範囲のうち、Vの外部かつ $\mathrm{x} \geqq 1$ の部分をUとする。
Uの平面$y=k(-1 \leqq k \leqq 1)$による断面は、右図の網掛部の通り、
半径$R(k)$、中心角$\dfrac{3}{4}\pi$の扇形になる。



Uの体積は　$\dfrac{3}{8}\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}\{R(k)\}^2dk=\dfrac{3}{4}\pi\int_{0}^{1}(5-k^2)dk-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\pi\int_{0}^{1}\sqrt{3-k^2}dk$

$$\int_0^1(5-k^2)dk=\left[5k-\frac{k^3}{3}\right]_0^1=\frac{14}{3}$$

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{3-k^2}dk$ は、右図の網掛部の面積に等しいから



$$\int_0^1\sqrt{3-k^2}dk=\frac{1}{2}(\sqrt{3})^2\alpha+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}=\frac{3}{2}\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \frac{3}{4}\pi\cdot\frac{14}{3}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\left(\frac{3}{2}\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(2-\frac{9\sqrt{2}}{4}\alpha\right)\pi$$

Wの体積は、Vの体積と、Uの体積の 4 倍の和であるから

$$\therefore \frac{20}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+4\left(2-\frac{9\sqrt{2}}{4}\alpha\right)\pi=\frac{20}{3}+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+8-9\sqrt{2}\alpha\right)\pi \quad \cdots\cdots(答)$$

※$R(k)=\sqrt{3}-\sqrt{k^2+2}$ではないことに注意。