

2024 年東大文 2

(1)

$5^n > 10^{19}$ であるとき、両辺の常用対数をとると $n \log_{10} 5 = n(1 - \log_{10} 2) > 19$ $n > \frac{19}{1 - \log_{10} 2}$

$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ より $\frac{19}{0.69} < \frac{19}{1 - \log_{10} 2} < \frac{19}{0.7}$ $\frac{19}{0.69} = 27.5\dots$ $\frac{19}{0.7} = 27.1\dots$

したがって、 $n \geq 28$ であるから $\therefore n = 28 \dots\dots$ (答)

(2)

(1)より、 $5^{28} + 4^{28} > 5^{28} > 10^{19}$ であるから、 $m = 28$ のとき成立。 $m = 27$ のときを調べる。

$$\log_{10} 5^{27} = 27(1 - \log_{10} 2) < 27 \cdot 0.7 = 18.9 < 18 + 3 \log_{10} 2 = \log_{10}(8 \times 10^{18}) \quad \therefore 5^{27} < 8 \times 10^{18}$$

$$\log_{10} 4^{27} = 54 \log_{10} 2 < 54 \cdot 0.31 = 16.74 < 16 + 3 \log_{10} 2 = \log_{10}(8 \times 10^{16}) \quad \therefore 4^{27} < 8 \times 10^{16}$$

$$5^{27} + 4^{27} < 8 \times 10^{18} + 8 \times 10^{16} = 8 \times (1 + 10^{-2}) \times 10^{18} = 8.08 \times 10^{18} < 10^{19}$$

したがって、 $m = 27$ のとき成立しないので $\therefore m = 28 \dots\dots$ (答)