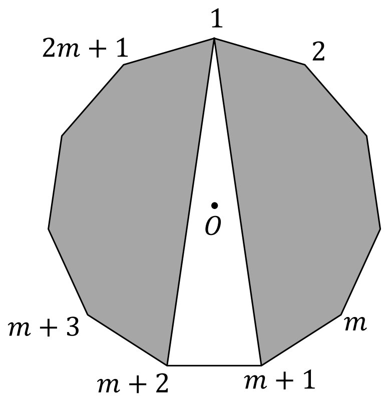
2024年東大文 $\boxed{4}$

$m$を2以上の自然数とする。正$2m+1$角形の$2m+1$個の頂点のうち、4つの頂点を同時に選び、選んだ4点を頂点とする四角形が、$O$を内部に含まない場合を考える。




右図の通り、正$2m+1$角形の1つの頂点を1番とし、以下時計回りに、各頂点に$2m+1$番まで番号をつける。

$O$を内部に含まない四角形の最長辺の一端が、1番の頂点であるとする。このとき、$O$を内部に含まない四角形の存在範囲は網掛部のようになる。

1番以外の3個の頂点の選び方は、

i）2番から$m+1$番までの$m$個の頂点から、3個を選ぶ。

ii）$m+2$番から$2m+1$番までの$m$個の頂点から、3個を選ぶ。

のいずれかであるから、1番以外の3個の頂点の選び方の総数は、

$$ {}_mC_3 + {}_mC_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} = \frac{m(m-1)(m-2)}{3} $$

重複を考慮し、正$2m+1$角形の$2m+1$個の頂点のうち、4つの頂点を同時に選び、選んだ4点を頂点とする四角形が、$O$を内部に含まないような選び方の総数は

$$ \frac{2m+1}{2} \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)(2m+1)}{6} $$

$n = 2m+1$ より、$m = \dfrac{n-1}{2}$ を代入すると

$$ \therefore \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdot \frac{n-5}{2} \cdot n = \frac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{48} $$

$n$個の頂点から任意の4頂点を選ぶ、選び方の総数は　${}_nC_4 = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$

以上により、正$n$角形の$n$個の頂点のうち、4つの頂点を同時に選び、選んだ4点を頂点とする四角形が、$O$を内部に含まない確率は

$$ \frac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{48} \cdot \frac{24}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{n-5}{2(n-2)} $$

余事象により、求める確率は　$1 - \dfrac{n-5}{2(n-2)} = \dfrac{n+1}{2(n-2)}$ ⋯⋯(答)

※$n=5$のとき、$O$が必ず内部に含まれるから、$n=5$でも成立。