2024年東大理 $\boxed{1}$

$P(x,y,0)$とする。

$\angle AOP \geqq \dfrac{2}{3}\pi$より　$\cos\angle AOP \leqq \cos\dfrac{2}{3}\pi = -\dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{OP}=(x,y,0), \overrightarrow{OA}=(0,-1,1)$より　$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{x^2+y^2}, \left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{2}$　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=-y$

$$\cos\angle AOP=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OA}\right|}=\frac{-y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}\leqq -\frac{1}{2}\qquad \frac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}\geqq\frac{1}{2}$$

$y>0$ の条件下で　$\dfrac{y^2}{2(x^2+y^2)}\geqq\dfrac{1}{4}$　$2y^2\geqq x^2+y^2$　$\therefore y^2-x^2\geqq 0$ ――①

$\angle OAP \leqq \dfrac{\pi}{6}$より　$\cos\angle AOP \geqq \cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{AP}=(x,y+1,-1), \overrightarrow{AO}=(0,1,-1)$より　$\left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}, \left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{2}$　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO}=y+2$

$$\cos\angle OAP=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\overrightarrow{AO}\right|}=\frac{y+2}{\sqrt{2(x^2+y^2+2y+2)}}\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$y>0$ より　$\dfrac{(y+2)^2}{2(x^2+y^2+2y+2)}\geqq\dfrac{3}{4}$　$2(y+2)^2\geqq 3(x^2+y^2+2y+2)$

$3(x^2+y^2+2y+2)\leqq 2(y^2+4y+4)$　$3x^2+y^2-2y\leqq 2$　$3x^2+(y-1)^2\leqq 3$

$\therefore x^2+\dfrac{(y-1)^2}{3}\leqq 1$ ――②

求める範囲は、$y>0$かつ①かつ②である。
図示すると右図の通りで、原点以外の境界線を含む。