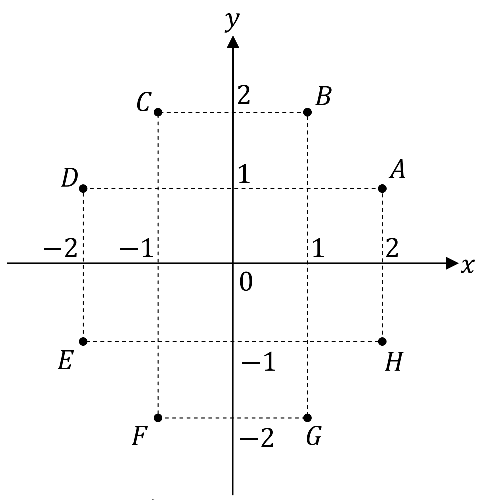
2024年東大理$\boxed{3}$



(1)

右図の通り、$(\pm 2, \pm 1), (\pm 1, \pm 2)$ (複号任意) $\cdots\cdots$ (答)

(2)

点$(2,1)$をAとして、反時計回りにB, C, D, E, F, G, Hとする。

最初からn秒後にPが点A, B, C, D, E, F, G, Hにいる確率を、

$a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, h_n$とする。

最初、Pは点Aにいるので　$\therefore a_1 = e_1 = 0$　以降、nが奇数のとき、$a_n = e_n = 0$である。

また、nが奇数のとき、次の漸化式が成り立つ。$a_{n+1} = e_{n+1} = \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{3}d_n + \frac{1}{6}f_n + \frac{1}{3}h_n$

したがって、$a_n = e_n$が示された。　(証明終)

(3)

(2)と同様に考え、最初からn秒後に、原点に関して対称な2点にいる確率は等しい。

$a_n = e_n, b_n = f_n, c_n = g_n, d_n = h_n$より

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{3}d_n + \frac{1}{6}f_n + \frac{1}{3}h_n = \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}d_n \text{ —— ①} \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{6}e_n + \frac{1}{3}g_n = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}c_n \text{ —— ②}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6}d_n + \frac{1}{3}f_n + \frac{1}{6}h_n = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}d_n \text{ —— ③} \quad d_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{6}c_n + \frac{1}{3}e_n + \frac{1}{6}g_n = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \text{ —— ④}$$

①＋③より　$a_{n+1} + c_{n+1} = b_n + d_n$　$2(a_n + b_n + c_n + d_n) = 1$ より

$$2(a_{n+1} + c_{n+1}) = 2(b_n + d_n) = 1 - 2(a_n + c_n) \quad a_{n+1} + c_{n+1} = -(a_n + c_n) + \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} + c_{n+1} - \frac{1}{4} = -\left(a_n + c_n - \frac{1}{4}\right)$$　$a_1 = c_1 = 0$ より　$a_n + c_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(-1)^{n-1} = \frac{1}{4}(-1)^n$

$$\therefore a_n + c_n = \frac{1}{4}\{1 + (-1)^n\} \text{ —— ⑤}$$

また、①〜④より

$$a_{n+2} = \frac{1}{3}b_{n+1} + \frac{2}{3}d_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}c_n\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n\right) = \frac{5}{9}a_n + \frac{4}{9}c_n \text{ —— ⑥}$$

$$c_{n+2} = \frac{2}{3}b_{n+1} + \frac{1}{3}d_{n+1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}c_n\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n\right) = \frac{4}{9}a_n + \frac{5}{9}c_n \text{ —— ⑦}$$

⑥－⑦より　$a_{n+2} - c_{n+2} = \frac{1}{9}(a_n - c_n)$　nが奇数のとき$a_n - c_n = 0$ であり、

$$a_{2m+2} - c_{2m+2} = \frac{1}{9}(a_{2m} - c_{2m}) \quad a_{2m} - c_{2m} = \left(\frac{1}{9}\right)^{m-1}(c_2 - a_2)$$

$a_2=\frac{1}{3}b_1+\frac{2}{3}d_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$　$c_3=\frac{2}{3}b_1+\frac{1}{3}d_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$　$a_2-c_2=\frac{5}{18}-\frac{2}{9}=\frac{1}{18}$

$\therefore a_{2m}-c_{2m}=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{9}\right)^{m-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^{m}$ ―⑧

⑤、⑧より、nが偶数のとき、$a_n+c_n=\frac{1}{2},a_n-c_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$であるから

$2a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$　$\therefore a_n=\frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$

以上により　nが奇数のとき$a_n=0$、nが偶数のとき$a_n=\frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$ ……(答)