2024 年東大理 $\boxed{4}$

(1)

2 点$(c(t),0)$と$\left(t,f(t)\right)$を結ぶ線分の傾きは　$\dfrac{f(t)}{t-c(t)}$

この線分は、$\left(t,f(t)\right)$における放物線$y=f(x)$の接線と直交する。

$f'(t)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t$より　$-\dfrac{t-c(t)}{f(t)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t$　$t-c(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}tf(t)$

$\therefore c(t)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}tf(t)+t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}t^3+4\sqrt{2}t\right)+t$

$=\dfrac{1}{4}t^3-4t+t=\dfrac{1}{4}t^3-3t$ ……(答)

$\{r(t)\}^2=\{t-c(t)\}^2+\{f(t)\}^2=\dfrac{1}{2}t^2\{f(t)\}^2+\{f(t)\}^2=\left(\dfrac{1}{2}t^2+1\right)\{f(t)\}^2$より

$\therefore \{r(t)\}^2=\left(\dfrac{1}{2}t^2+1\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}t^2+4\sqrt{2}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}t^2+1\right)\left(\dfrac{1}{8}t^4-4t^2+32\right)$

$=\left(\dfrac{1}{2}t^2+1\right)\left(\dfrac{1}{8}t^4-4t^2+32\right)=\dfrac{1}{16}t^6-2t^4+16t^2+\dfrac{1}{8}t^4-4t^2+32$

$=\dfrac{1}{16}t^6-\dfrac{15}{8}t^4+12t^2+32$ ……(答)

(2)

円$\{x-c(t)\}^2+y^2=\{r(t)\}^2$が点$(3,a)$を通るとき

$a^2=\{r(t)\}^2-\{3-c(t)\}^2=\{r(t)\}^2-9+6c(t)-\{c(t)\}^2$

$=\dfrac{1}{16}t^6-\dfrac{15}{8}t^4+12t^2+32-9+6\left(\dfrac{1}{4}t^3-3t\right)-\left(\dfrac{1}{4}t^3-3t\right)^2$

$=\dfrac{1}{16}t^6-\dfrac{15}{8}t^4+12t^2+23+\dfrac{3}{2}t^3-18t-\dfrac{1}{16}t^6+\dfrac{3}{2}t^4-9t^2=-\dfrac{3}{8}t^4+\dfrac{3}{2}t^3+3t^2-18t+23$

$g(t)=-\dfrac{3}{8}t^4+\dfrac{3}{2}t^3+3t^2-18t+23$ とすると

$g'(t)=-\dfrac{3}{2}t^3+\dfrac{9}{2}t^2+6t-18=-\dfrac{3}{2}(t^3-3t^2-4t+12)=-\dfrac{3}{2}(t+2)(t-2)(t-3)$

$g(t)$の $0<\mathrm{t}<4$ における増減は、右の通り。

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$		↘		↗		↘	

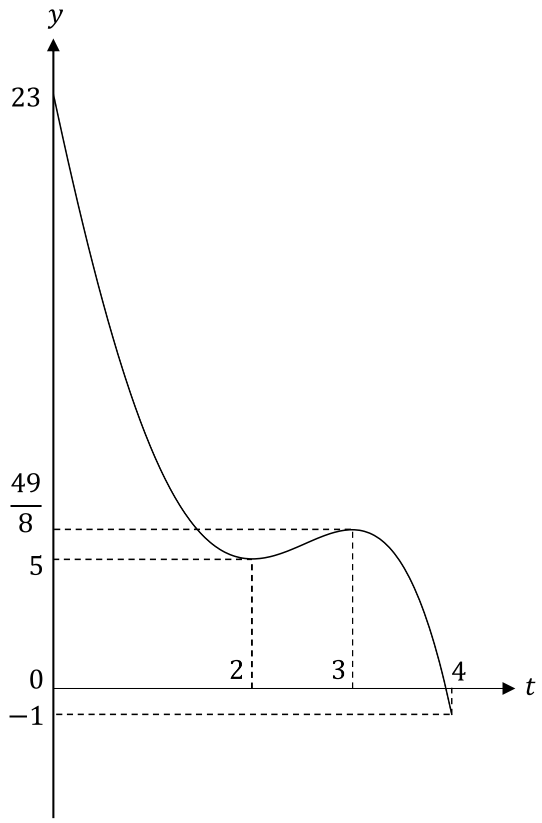
$g(0)=23$　$g(2)=-6+12+12-36+23=5$

$g(3)=-\dfrac{243}{8}+\dfrac{81}{2}+27-54+23=\dfrac{49}{8}$

$g(4)=-96+96+48-72+23=-1$

また、$f(3)=-\dfrac{9\sqrt{2}}{4}+4\sqrt{2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$より　$0<a<\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$　$0<a^2<\dfrac{49}{8}$

$0 < t < 4$ において、$y = g(t)$のグラフと$y = a^2$のグラフを考えると、求める個数は



$$\begin{cases} 0 < a^2 < 5 \text{ のとき} & 1\text{ 個} \\ a^2 = 5 \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ 5 < a^2 < \dfrac{49}{8} \text{ のとき} & 3\text{ 個} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 0 < a < \sqrt{5} \text{ のとき} & 1\text{ 個} \\ a = \sqrt{5} \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ \sqrt{5} < a < \dfrac{7\sqrt{2}}{4} \text{ のとき} & 3\text{ 個} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$