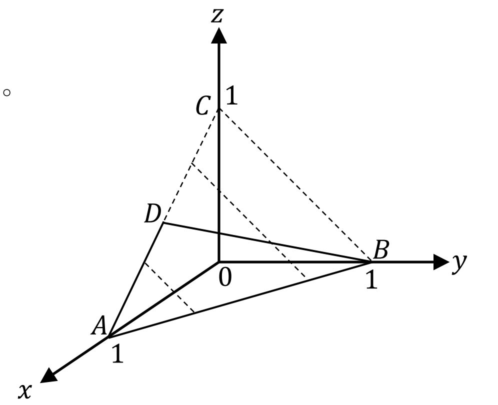
2024年東大理 $\boxed{5}$

三角形ABDと、平面$x = t\ (0 \leqq t \leqq 1)$の交差部にできる線分を考える。

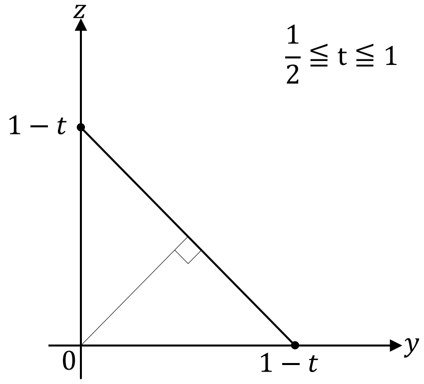
$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき、平面$x = t$は辺AB, ADと交差する。

2交点を結ぶ線分上の点と、x軸までの最短距離、最長距離は、

それぞれ$\dfrac{1-t}{\sqrt{2}}, 1-t$である。



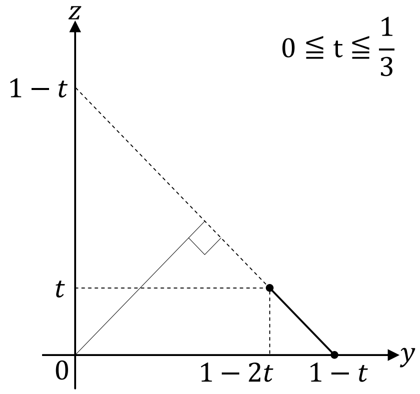
$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき、平面$x = t$は辺AB, BDと交差する。



$D\left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$であるから$\overrightarrow{BD} = \left(\dfrac{1}{2}, -1, \dfrac{1}{2}\right)$であり、$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$において、

辺BD上の点は　$\overrightarrow{OB} + 2t\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix}$と表せる。

$t = 1 - 2t$を解くと　$3t = 1$　$t = \dfrac{1}{3}$



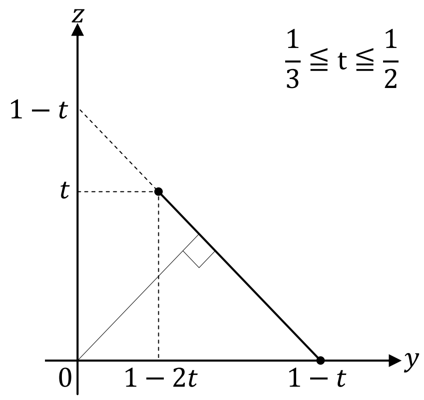
$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$のとき

2交点を結ぶ線分上の点と、x軸までの最短距離、最長距離は、
それぞれ$\sqrt{t^2 + (1-2t)^2} = \sqrt{1 - 4t + 5t^2}, 1-t$である。

$\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$のとき

2交点を結ぶ線分上の点と、x軸までの最短距離、最長距離は、

それぞれ$\dfrac{1-t}{\sqrt{2}}, 1-t$である。



この立体の、平面$x = t$による断面はドーナツ形であり、面積$S(t)$は

$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$のとき　$S(t) = \pi\{(1-t)^2 - (1 - 4t + 5t^2)\} = \pi(2t - 4t^2)$

$\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq 1$ のとき　$\mathrm{S(t)} = \pi\left\{(1-t)^2 - \dfrac{(1-t)^2}{2}\right\} = \dfrac{\pi}{2}(1-t)^2$

求める体積は

$$\int_0^1 S(t)dt = \pi\int_0^{\frac{1}{3}}(2t - 4t^2)dt + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{3}}^1 (1-t)^2 dt = \pi\left[t^2 - \frac{4}{3}t^3\right]_0^{\frac{1}{3}} + \frac{\pi}{2}\left[-\frac{(1-t)^3}{3}\right]_{\frac{1}{3}}^1$$

$$= \pi\left(\frac{1}{9} - \frac{4}{81}\right) + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{8}{81} = \frac{5}{81}\pi + \frac{4}{81}\pi = \frac{\pi}{9} \cdots\cdots (答)$$