2024年東大理$\boxed{6}$

(1)

$f(n)=n^3+10n^2+20n=n(n^2+10n+20)$であるから、

$f(n)$が素数であるとき、$n=\pm1$か、$n^2+10n+20=\pm1$か、いずれかが成り立つ必要がある。

$f(1)=31$は、素数である。$f(-1)=-11$は、素数ではない。

$n^2+10n+20=1$とすると　$n^2+10n+19=0$　$n=-5\pm\sqrt{6}$であり、nは整数にならない。

$n^2+10n+20=-1$とすると　$n^2+10n+21=(n+3)(n+7)=0$　$n=-7,-3$

$f(-7)=7, f(-3)=3$は素数である。以上により　$\therefore n=-7,-3,1$ ……(答)

(2)

$f(n)=n(n^2+an+b)$が素数であるとき

i) $1+a+b=p$となる素数pが存在する。　ii) $1-a+b=-q$となる素数qが存在する。

iii) $p^2+ap+b=1$となる素数pが存在する。　iv) $q^2-ap+b=-1$となる素数qが存在する。

上記のいずれかが成立する必要がある。

iii)とiv)が同時に成り立つかを調べる。

p,qを素数として　$p^2+ap+b=1$ ── ①　$q^2-ap+b=-1$ ── ②

① − ②より　$p^2-q^2+a(p+q)=(p+q)(p-q+a)=2$

$p+q$は2の約数でなければならないが、$p+q\geqq4$であるから、不適。

したがって、iii)とiv)が同時に成立することはなく、いずれか一方しか成立しない。

iii)またはiv)が成立するnが0個であるとき、$f(n)$が素数となるnは最大2個である。

iii)またはiv)が成立するnが1個であるとき、$f(n)$が素数となるnは最大3個である。

iii)またはiv)が成立するnが2個であるときを考える。

相違なる素数α,βにおいてiii)が成立するとき

α,βは$n^2+an+b-1=0$の解であるから　$\alpha+\beta=-a, \alpha\beta=b-1$　$\therefore a=-\alpha-\beta, b=\alpha\beta+1$

このとき、i)とii)が同時に成り立つかを調べる。

p,qを素数として　$1+a+b=p$ ── ③　$1-a+b=-q$ ── ④

④より　$1-a+b=2+\alpha+\beta+\alpha\beta=-q<0$　$(\alpha+1)(\beta+1)+1<0$　左辺は正であるから、不適。

したがって、少なくともii)は成立しない。

相違なる素数α,βにおいてiv)が成立するとき

$-\alpha,-\beta$は$n^2+an+b+1=0$の解であるから$-\alpha-\beta=-a, \alpha\beta=b+1$　$\therefore a=\alpha+\beta, b=\alpha\beta-1$

このとき、i)とii)が同時に成り立つかを調べる。

p,qを素数として　$1+a+b=p$ ── ⑤　$1-a+b=-q$ ── ⑥

⑥より　$1-a+b=-\alpha-\beta+\alpha\beta=-q<0$　$(\alpha-1)(\beta-1)<1$　$(\alpha-1)(\beta-1)\geqq1$であるから、不適。

したがって、少なくともii)は成立しない。

以上により、$f(n)$が素数になるnは、3個以下である。　(証明終)