

$a \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $x^2 + a \leq y \leq -\frac{1}{2}x^2 + 2, -1 \leq x \leq 1$ で表される領域 T の面積 $T(a)$ は

$$T(a) = \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2 - x^2 - a \right) dx = 2 \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 2 - a \right) dx = [-x^3 + 2(2-a)x]_0^1 = -2a + 3$$

領域 T のうち、 $y < 0$ の範囲にある部分の面積を $U(a)$ とする。

$-2 \leq a < -1$ のとき

$$U(a) = \int_{-1}^1 (-x^2 - a) dx = 2 \left[-\frac{x^3}{3} - ax \right]_0^1 = -2a - \frac{2}{3}$$

$$S(a) = T(a) - 2U(a) = -2a + 3 + 4a + \frac{4}{3} = 2a + \frac{13}{3}$$

$-2 \leq a < -1$ において、 $S(a)$ は単調増加。

$-1 \leq a < 0$ のとき

$$U(a) = \int_{-\sqrt{-a}}^{\sqrt{-a}} (-x^2 - a) dx = 2 \left[-\frac{x^3}{3} - ax \right]_0^{\sqrt{-a}} = \frac{4}{3}(-a)^{\frac{3}{2}}$$

$$S(a) = T(a) - 2U(a) = -2a + 3 - \frac{8}{3}(-a)^{\frac{3}{2}} \quad S'(a) = -2 + 4\sqrt{-a}$$

$-1 \leq a < 0$ のとき、 $S(a)$ は $a = -\frac{1}{4}$ において極大。

a	-1	...	$-\frac{1}{4}$	...	0
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		↗		↘	

$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき

$U(a) = 0$ であるから、 $S(a) = T(a) = -2a + 3$

$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ において、 $S(a)$ は単調減少。

以降、 $\frac{1}{2} < a < 2$ においても単調減少である。

以上により、 $S(a)$ の最大値は $\therefore S\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{3} = \frac{19}{6} \dots\dots$ (答)

